

**Estudos de Problemas de Dimensionamento de  
Lotes Monoestágio com Restrição de Capacidade**

**Silvio Alexandre de Araujo**

**Orientador: Prof. Dr. Marcos Nereu Arenales**

*Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação –  
USP, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências –  
Área de Ciências de Computação e Matemática Computacional*

**USP– São Carlos**

**Março de 1999**

*Aos meus pais e à minha avó*

## AGRADECIMENTOS

- Ao meu orientador Marcos Nereu Arenales pela orientação, dedicação, amizade, e principalmente, pela confiança depositada no desenvolvimento deste trabalho e de outros que ainda deverão ser desenvolvidos.
- À minha família pois, sem ela, este passo de minha vida nunca teria sido conquistado. Aliás, sem ela, não sei se teria dado o primeiro passo.
- À minha namorada Selma pelo apoio, compreensão, amizade, amor e por estar sempre ao meu lado.
- Ao Castelo, Regina e Maristela por colaborarem na realização deste trabalho.
- A todos os funcionários do ICMC que, direta ou indiretamente, contribuíram com este trabalho.
- A todos os meus amigos de São Carlos por estarem sempre presentes, seja nas horas de trabalho, seja nos momentos de descontração.
- Aos amigos de todos os tempos de Prudente, em especial ao pessoal do clube pelas grandes festas, aos UNESPianos pela amizade intensa, ao pessoal da Toledo e à turma do futebolzinho de começo, meio e fim de semana.
- À FAPESP pela credibilidade e apoio financeiro.

## RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre problemas de dimensionamento de lotes monoestágios, que consistem em determinar as quantidades de itens a serem produzidos em diferentes períodos de tempo, de modo a minimizar a soma dos custos de produção, preparação e estoque. A quantidade produzida em cada período deve ser capaz de atender as demandas dos itens, sem exceder a capacidade de máquina. Para retratar o consumo de recursos, são incluídos tempos de preparação e produção. Inicialmente, são apresentados alguns métodos básicos para resolução de modelos simplificados e, em seguida, apresenta-se dois métodos para resolução de importantes modelos da literatura de problemas monoestágios. O primeiro, foi desenvolvido por Trigeiro *et al.* (1989) e consiste num método heurístico baseado em relaxação Lagrangiana, no método de otimização do subgradiente e em uma heurística de factibilização. O segundo método, desenvolvido por Diaby *et al.* (1992a), é um método exato, baseado num procedimento de enumeração implícita, onde os limitantes inferiores são gerados por relaxação Lagrangiana tendo como opção a utilização do método de otimização do subgradiente. O primeiro método foi implementado assim como uma versão modificada. Finalmente, são apresentados alguns experimentos computacionais comparando as duas versões.

## ABSTRACT

This work presents a study of the single product lot sizing problems. These problems consists of determining the quantities to be produced in different periods of time, minimizing the sum of costs of production, setup and inventory. The quantity to be produced in each period should be sufficient to attend the demands of items, without exceeding the capacity of the machine. To model the aspects of consumption of resources, setup and production times are included in the model. Initially, some basic methods for resolution of simplified models are presented, followed by two other methods for resolution of important models in the literature of single product problems. The first one, developed by Trigeiro *et al.* (1989), consists of a heuristic method based on Lagrangean relaxation, subgradient optimization and a feasibility heuristic. The second one, developed by Diaby *et al.* (1992a), is an branch and bound method, using lower bounds generated by Lagrangean relaxation, and the subgradient optimization method as an option. The first method was implemented together with a modified version. Finally, it is presented some computational experiments comparing both versions.

# ÍNDICE

<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO 1: DEFINIÇÕES E MODELAGENS DOS PROBLEMAS.....</b>	<b>4</b>
1.1 INTRODUÇÃO .....	4
1.2 PROBLEMA MONOESTÁGIO COM UM ÚNICO ITEM .....	5
1.3 PROBLEMA MONOESTÁGIO COM MÚLTIPLOS ITENS.....	8
1.4 MOTIVAÇÕES PARA O ESTUDO DE PROBLEMAS MONOESTÁGIOS.....	11
<b>CAPÍTULO 2: MÉTODOS BÁSICOS DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES.....</b>	<b>18</b>
2.1 INTRODUÇÃO .....	18
2.2 HEURÍSTICAS .....	18
2.3 O MÉTODO ÓTIMO DE WAGNER E WHITIN.....	20
<b>CAPÍTULO 3: UMA ABORDAGEM HEURÍSTICA PARA O PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES MONOESTÁGIO COM RESTRIÇÃO DE CAPACIDADE.....</b>	<b>25</b>
3.1 INTRODUÇÃO .....	25
3.2 ALGORITMO GERAL .....	26
3.3 OBTENÇÃO DO LIMITANTE INFERIOR (PASSO 1).....	27
3.4 HEURÍSTICA DE FACTIBILIZAÇÃO (PASSO 2) .....	28
3.5 ATUALIZAÇÃO DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE (PASSO 3).....	32
3.6 UM NOVO “ARRANJO FINAL” PARA O MÉTODO DE TRIGEIRO <i>ET AL.</i> (1989).....	32
3.6.1 Descrição da Nova Proposta de “Arranjo Final” .....	36
3.7 RESULTADOS COMPUTACIONAIS.....	39
3.7.1 Geração de dados.....	39
3.7.2 Resultados Computacionais para o Método de Trigeiro <i>et al.</i> (1989) com Custos Variáveis no Tempo. 41	
3.7.3 Comparação Entre as Duas Propostas de Arranjo Final.....	43
<b>CAPÍTULO 4: ..... UMA ABORDAGEM EXATA PARA O PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES MONOESTÁGIO COM RESTRIÇÃO DE CAPACIDADE.....</b>	<b>54</b>
4.1 INTRODUÇÃO .....	54
4.2 ALGORITMO GERAL.....	55
4.3 GERAÇÃO DO LIMITANTE SUPERIOR INICIAL .....	56
4.4 OBTENÇÃO DOS LIMITANTES INFERIORES.....	59
4.4.1 Relaxação Lagrangiana das restrições de demanda (RLD).....	59
4.4.2 Relaxação Lagrangiana das restrições de capacidade (RLC) .....	60
4.4.3 Limitação dos nós finais .....	61
4.5 A ESTRATÉGIA DE RE-LIMITAÇÃO (MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO DO SUBGRADIENTE).....	62

4.6 A ESTRATÉGIA DE RAMIFICAÇÃO .....	65
4.6.1 Seleção de nós .....	65
4.6.2 Seleção das variáveis.....	66
4.7 RESULTADOS COMPUTACIONAIS.....	67
<b>CAPÍTULO 5: CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS .....</b>	<b>69</b>
<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>72</b>
<b>APÊNDICE</b>	

# Introdução

A indústria de manufatura tem sido muito estimulada a tornar seus processos mais eficientes. Este estímulo advém da maior competitividade imposta pelas transformações que têm afetado a ordem econômica mundial. Assim, as indústrias vêm sofrendo profundas mudanças no seu setor produtivo no que tange à modernização de seus processos de produção, melhoria da qualidade de seus produtos e racionalização administrativa.

O gerenciamento da produção dentro de uma empresa é responsável pela transformação de matérias-primas em produtos acabados. O sistema responsável por este gerenciamento denomina-se Planejamento e Controle da Produção (PCP), que coordena todas as atividades, desde a aquisição de matérias-primas, até a entrega dos produtos acabados. A estrutura hierárquica de um sistema PCP pode ser dividida em três níveis de planejamento distintos: estratégico, tático e operacional (Anthony, 1965).

O planejamento estratégico está relacionado ao mais alto nível de tomada de decisões, onde são definidas as metas globais de uma empresa e as políticas adequadas para atingi-las, determinando os objetivos da empresa a longo prazo.

O planejamento tático é responsável pela implementação das estratégias definidas no nível superior (planejamento estratégico), de forma a utilizar eficientemente os recursos disponíveis. Nesta etapa devem ser tomadas as decisões a médio prazo.

Por fim, tem-se o planejamento operacional que trata de decisões do dia-a-dia da produção de uma empresa, ou seja, são tomadas decisões a curto prazo, tendo como objetivo executar os planos definidos anteriormente.

Este trabalho enfoca os problemas de tomada de decisão relacionados com o planejamento tático/operacional. O planejamento da produção nestes níveis consiste no processo de determinar um plano de quanto produzir e/ou comprar nos próximos períodos de tempo, chamado de horizonte de planejamento. Também determina os níveis de estoque e os recursos necessários para implementar tal plano (Thomas e McClain, 1993)

Um sistema utilizado nesse planejamento é o MRP-Planejamento das Necessidades de Materiais (*Material Requirements Planning*). Um sistema MRP é uma coleção de procedimentos lógicos que têm sido amplamente utilizados para o gerenciamento do planejamento da produção. Seu objetivo é converter o Plano Mestre de Produção-PMP num plano de fabricação de produtos finais e na produção e/ou compra de seus possíveis itens componentes, ou seja, determinar o tamanho dos lotes de produção e/ou compra.

Um sistema MRP é baseado em previsões de demanda de cada produto final ao longo de um horizonte de planejamento, nos níveis iniciais de estoque, na lista de materiais, que é definida pela estrutura do produto e, no *lead time* de cada item. *Lead time* é o tempo mínimo necessário a partir da ordem de produção até que o item esteja pronto. A partir desses dados, o MRP fornece um planejamento sincronizado da produção dos produtos finais e de seus itens componentes, informando a quantidade específica no período adequado a ser produzida e/ou comprada, de forma a poder atender a demanda prevista em cada período.

Entretanto, esta abordagem tradicional de MRP tem suas limitações. Em sua forma básica, o MRP assume que não há restrição de capacidade, isto é, qualquer quantidade de produção é possível. Além disso, o plano gerado pela aplicação do MRP, a princípio não fornece um plano de produção no sentido do custo ser o menor possível, ou seja, não são considerados os custos envolvidos na produção, no estoque e na preparação (*setup*) das máquinas. Estas limitações, compõem a essência do problema de dimensionamento de lotes. Este problema, implícito num sistema MRP, tem como objetivo realizar o dimensionamento dos tamanhos dos lotes de produção de modo que os custos envolvidos sejam minimizados, podendo considerar que os recursos para a produção sejam limitados (Berretta, 1997).

A intenção deste trabalho é estudar métodos de resolução para problemas de dimensionamento de lotes baseado em sistemas computacionais. Estes métodos conseguem englobar múltiplos e complexos aspectos que intervêm no processo de produção, difíceis de serem analisados de forma racional, mesmo por planejadores experientes. Tais ferramentas permitem que se escolha as melhores alternativas com respeito às restrições inerentes ao processo. Sendo assim, observa-se que esta é uma área de pesquisa que tem merecido grande atenção de pesquisadores devido a sua relevância na otimização de processos produtivos.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 1, são dadas as definições e modelagens de alguns tipos de problemas de dimensionamento de lotes monoestágios. Os problemas são definidos e modelados para um único item e múltiplos itens e, ainda, com e sem restrição de capacidade. No final deste capítulo, tem-se a seção (1.4) onde é dada uma motivação para se estudar problemas de dimensionamento de lotes monoestágios.

No capítulo 2, são apresentadas algumas idéias básicas de métodos heurísticos para resolver problemas de dimensionamento de lotes com um único item sem restrição de capacidade e, por fim, apresenta-se o método ótimo de Wagner e Whitin (1958).



No capítulo 3, tem-se a abordagem de Trigeiro *et al.* (1989), para resolução do problema com restrição de capacidade, múltiplos itens e com tempo e custo de preparação de máquina. Trata-se de um método heurístico que utiliza relaxação Lagrangiana (apêndice), uma heurística de factibilização, isto é, uma heurística para a obtenção de uma solução factível a partir da solução relaxada e, o método de otimização do subgradiente (apêndice), utilizado para atualizar os valores duais. Após ter feito um estudo da abordagem de Trigeiro *et al.* (1989), o método proposto pelos autores foi implementado, considerando custos variáveis no tempo e, foi implementada também, uma proposta de mudança neste método. Esta mudança consiste em aplicar um procedimento de melhoria da solução factível diferente do que foi proposto por Trigeiro *et al.* (1989). Os resultados obtidos da comparação entre as duas versões do método são apresentados no final do capítulo.

No capítulo 4, estuda-se o artigo de Diaby *et al.* (1992a) onde o modelo é um pouco mais complexo do que o anterior, pois, tem as mesmas considerações e ainda permite hora extra. O método desenvolvido é ótimo e, baseia-se em um método de enumeração implícita (apêndice), sendo que, os limitantes inferiores são gerados por relaxação Lagrangiana (apêndice), tendo como opção a utilização ou não do método de otimização do subgradiente (apêndice) para atualizar os valores duais. O limitante superior inicial é gerado através de alguma heurística.

Por fim, no capítulo 5 são apresentadas as conclusões e são feitas algumas propostas que podem ser desenvolvidas em trabalhos futuros.

---

---

## CAPÍTULO 1:

### Definições e Modelagens dos Problemas

---

---

#### 1.1 Introdução

O problema de dimensionamento de lotes consiste em planejar a quantidade de itens a ser produzida em várias (ou única) máquinas, em cada período ao longo de um horizonte de tempo finito, de modo a atender uma certa demanda, podendo estar sujeito a algumas restrições, como por exemplo, restrições de limitação de capacidade, tendo como objetivo otimizar uma função, que pode ser, minimizar custos.

O problema de dimensionamento de lotes pode ser dividido em monoestágio e multiestágio. Denomina-se sistema de produção multiestágio quando os itens a serem produzidos são dependentes, isto é, a produção de determinado item depende da produção de outro item, que é chamado item componente. Diz-se que um sistema de produção é monoestágio quando os itens a serem produzidos são independentes, ou seja, nenhum item depende da produção de outro item. A motivação para estudar a classe de problemas de dimensionamento de lotes monoestágios está no fato de que, além de sua potencialidade de aplicações, o problema monoestágio aparece como um subproblema em diversos casos, de modo que, implementações eficientes dos bons algoritmos disponíveis melhoram o desempenho de algoritmos projetados para problemas mais gerais (Bahl *et al.* 1987). Na seção 1.4 deste capítulo, faz-se alguns comentários a respeito de métodos de resolução para problemas multiestágios que envolvem a resolução de problemas monoestágios.

O problema monoestágio pode ser subdividido em várias categorias, por exemplo: pode ser considerado para um único item ou para vários itens, com ou sem restrição de capacidade. Essas categorias serão detalhadas nas próximas seções, sendo que, uma revisão bibliográfica mais completa pode ser encontrada em Bahl *et al.* (1987) e Toledo (1998). Observa-se que, neste

trabalho serão considerados tempos de preparação de máquina em todas as formulações que incluem restrição de capacidade.

A consideração ou não de tempos de preparação na modelagem do problema tem gerado algumas controvérsias. Alguns autores sugerem que tempos de preparação já estão incluídos implicitamente nos custos de preparação (Maes e Van Wassenhove, 1991), não sendo necessário incorporá-los ao modelo. Outros autores, afirmam que a substituição dos tempos de preparação por seus custos pode levar a uma representação falsa do consumo de recursos (Billington *et al.*, 1983 e Kuik *et al.*, 1994). Billington *et al.* (1994) destacam que o tempo de preparação pode ser ignorado em algumas indústrias de processo, mas em vários sistemas com restrição de capacidade, um dos fatores mais críticos do problema de dimensionamento de lotes é o tempo de preparação e não seu custo. Trigeiro *et al.* (1989) fazem um exemplo mostrando que certos problemas não devem ser formulados sem a inclusão de tempos de preparação.

A inclusão de tempos de preparação, aumenta bastante o grau de complexidade do problema. Florian *et al.* (1980) mostraram que, para problemas com recursos de produção limitados e custos de preparação, encontrar a solução ótima para o problema com um único item é um problema *NP-Hard*. Bitran e Yanasse (1982) mostraram que vários casos de problemas com um único item, podem ser resolvidos em tempo polinomial, tornando-se *NP-Hard* quando um segundo item é introduzido. Quando se considera tempo de preparação, o problema de encontrar uma solução factível é *NP-Completo* (Maes *et al.*, 1991). Para tempos de preparação nulos, as restrições são lineares e, portanto, o problema de factibilidade é da classe *P*. Esta é uma das razões pela qual existem poucas pesquisas que incluem tempos de preparação.

## 1.2 Problema Monoestágio com Um Único Item

O problema de dimensionamento de lotes monoestágio com um único item consiste na determinação da produção dos lotes de apenas um item para vários períodos de tempo, de modo a minimizar as somas dos custos de preparação, produção e estoque sobre um horizonte de planejamento. Deve-se também atender uma demanda preestabelecida e, pode-se considerar a formulação com ou sem restrição de capacidade.

*Problema de Dimensionamento de Lotes Monoestágio para Um Único Item  
sem Restrição de Capacidade*

Considere os seguintes dados:

- $c_t$       Custo unitário de produção no período  $t$ .
- $S_t$       Custo de preparação para a produção no período  $t$ .
- $H_t$       Custo unitário de estocagem no período  $t$ .
- $d_t$       Demanda do período  $t$ .
- $M$       Número grande.

As variáveis de decisão são:

- $X_t$       Unidades produzidas no período  $t$ .
- $I_t$       Unidades estocadas no período  $t$ .
- $Y_t$       Variável binária, indicando a produção ou não no período  $t$ .

Índice:

$t = 1, \dots, T$       Períodos de tempo.

Formulação do Problema:

$$\min \sum_t (H_t I_t + c_t X_t + S_t Y_t) \quad (1.1)$$

*Sujeito a:*

$$I_{t-1} + X_t - I_t = d_t \quad \forall t \quad (1.2)$$

$$X_t - M Y_t \leq 0 \quad \forall t \quad (1.3)$$

$$Y_t = \begin{cases} 1, & \text{se } X_t > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall t \quad (1.4)$$

$$X_t \text{ e } I_t \geq 0 \quad \forall t \quad (1.5)$$

Na formulação anterior, a função objetivo (1.1) minimiza a soma dos custos de produção, estoque e preparação. As restrições (1.2) são de balanceamento de estoque, ou seja, a quantidade

produzida num período mais a quantidade disponível em estoque no início, menos o que sobrar em estoque no fim do período deve ser igual a demanda do período. As restrições (1.3) e (1.4) asseguram que o tempo e o custo de preparação são considerados apenas quando existe produção e, por fim, (1.5) são restrições de não negatividade. O estoque inicial e final são nulos.

Este problema pode ser resolvido otimamente através do algoritmo de programação dinâmica desenvolvido por Wagner e Whitin (1958), o qual será descrito no próximo capítulo deste trabalho. Cabe salientar aqui que, apesar de sua simplicidade, este problema é de grande importância pois, muitos problemas mais complexos podem ser relaxados tendo como resultado vários problemas mais simples, iguais a este.

O problema (1.1)-(1.5) pode ser formulado de maneira semelhante incluindo restrição de limitação de capacidade de produção por período. Observe na formulação a seguir que serão incluídas as restrições de capacidade (1.8), que levam em consideração o tempo despendido para a produção e para a preparação de máquina.

*Problema de Dimensionamento de Lotes Monoestágio para Um Único Item  
com Restrição de Capacidade*

Considere os seguintes dados:

- $c_t$  Custo unitário de produção no período  $t$ .
- $S_t$  Custo de preparação para a produção no período  $t$ .
- $H_t$  Custo unitário de estocagem no período  $t$ .
- $b_t$  Tempo necessário para produzir uma unidade no período  $t$ .
- $s_t$  Tempo de preparação para a produção no período  $t$ .
- $CAP_t$  Limite de capacidade (em unidades de tempo) no período  $t$ .
- $d_t$  Demanda do período  $t$ .
- $M$  Número grande.

As variáveis de decisão são:

- $X_t$  Unidades produzidas no período  $t$ .
- $I_t$  Unidades estocadas no período  $t$ .
- $Y_t$  Variável binária, indicando a produção ou não no período  $t$ .

Índice:

$t = 1, \dots, T$  Períodos de tempo.

Formulação do Problema:

$$\text{Min } \sum_t (H_t I_t + c_t X_t + S_t Y_t) \quad (1.6)$$

Sujeito a:

$$I_{t-1} + X_t - I_t = d_t \quad \forall t \quad (1.7)$$

$$b_t X_t + s_t Y_t \leq \text{CAP}_t \quad \forall t \quad (1.8)$$

$$X_t - M Y_t \leq 0 \quad \forall t \quad (1.9)$$

$$Y_t = \begin{cases} 1, & \text{se } X_t > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall t \quad (1.10)$$

$$X_t \text{ e } I_t \geq 0 \quad \forall t \quad (1.11)$$

### 1.3 Problema Monoestágio com Múltiplos Itens

O estudo do problema de dimensionamento de lotes monoestágio com múltiplos itens e com restrição de capacidade consiste no principal interesse deste trabalho. Foram desenvolvidos métodos ótimos, quase ótimos e heurísticos para a resolução deste problema, sendo que, dois deles foram estudados neste trabalho e são descritos nos capítulos 3 e 4. Estes dois métodos são baseados nas formulações (1.12)-(1.17) e (1.18)-(1.25) dadas a seguir.

*Problema de Dimensionamento de Lotes Monoestágio/Multi-Itens com Restrição de Capacidade*  
(Trigeiro *et al.*, 1989)

Os seguintes dados são utilizados no problema:

$c_{it}$  Custo unitário de produção do item  $i$  no período  $t$ .

$S_{it}$  Custo de preparação para a produção do item  $i$  no período  $t$ .

$H_{it}$  Custo unitário de estocagem do item  $i$  no período  $t$ .

- $b_i$  Tempo necessário para produzir uma unidade do item  $i$ .  
 $s_i$  Tempo de preparação para a produção do item  $i$ .  
 $CAP_t$  Limite de capacidade (em unidades de tempo) no período  $t$ .  
 $d_{it}$  Demanda do item  $i$  no período  $t$ .  
 $M$  Número grande.

As variáveis de decisão são:

- $X_{it}$  Unidades do item  $i$  produzidas no período  $t$ .  
 $I_{it}$  Unidades do item  $i$  estocadas no período  $t$ .  
 $Y_{it}$  Variável binária, indicando a produção ou não do item  $i$  no período  $t$ .

Índices:

- $t = 1, \dots, T$  Períodos de tempo.  
 $i = 1, \dots, N$  Itens.

Formulação do Problema:

$$\min \sum_t \sum_i H_{it} I_{it} + \sum_t \sum_i c_{it} X_{it} + \sum_t \sum_i S_{it} Y_{it} \quad (1.12)$$

*Sujeito a:*

$$I_{i,t-1} + X_{it} - I_{it} = d_{it} \quad \forall i, t \quad (1.13)$$

$$\sum_i b_i X_{it} + \sum_i s_i Y_{it} \leq CAP_t \quad \forall t \quad (1.14)$$

$$X_{it} - M Y_{it} \leq 0 \quad \forall i, t \quad (1.15)$$

$$Y_{it} = \begin{cases} 1, & \text{se } X_{it} > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i, t \quad (1.16)$$

$$X_{it} \text{ e } I_{it} \geq 0 \quad \forall i, t \quad (1.17)$$

Na formulação anterior, a função objetivo (1.12) minimiza a soma dos custos de produção, estoque e preparação. As restrições (1.13) são de balanceamento de estoque, ou seja, a quantidade produzida num período mais a quantidade disponível em estoque no início menos o

que sobrar em estoque no fim do período deve ser igual a demanda do período. As restrições (1.14) são devido a limitação de capacidade onde se leva em consideração o tempo despendido para a produção dos itens e preparação das máquinas. As restrições (1.15) e (1.16) asseguram que o tempo e o custo de preparação são considerados apenas quando existe produção e, por fim, (1.17) são restrições de não negatividade. O estoque inicial é zero ( $I_{i0}=0$ ).

A formulação do problema com múltiplos itens sem restrição de capacidade é semelhante à formulação (1.12)-(1.17), basta desconsiderar as restrições (1.14).

*Problema de Dimensionamento de Lotes Monoestágio/Multi-Itens com Restrição de Capacidade  
Considerando Hora Extra (Diaby et al., 1992a)*

Os seguintes dados serão utilizados no problema:

- $c_{rt}$     Custo unitário de produção no período t em hora regular.
- $c_{vt}$     Custo unitário de produção no período t em hora extra (*overtime*).
- $S_i$     Custo de preparação (*setup*) do item i.
- $H_{it}$     Custo unitário de estocagem do item i do período t até t+1.
- $b_i$     Tempo necessário para produzir uma unidade do item i.
- $s_i$     Tempo de preparação para a produção do item i.
- $w_t$     Máximo de horas regulares no período t.
- $z_t$     Máximo de horas extras no período t.
- $d_{it}$     Demanda do item i no período t.
- $m_{it}$     Quantidade máxima produzida do item i no período t ( $m_{it} = \sum_{j=t}^T d_{ij}$  onde T é o número de períodos).

As variáveis de decisão são:

- $X_{it}$     Unidades do item i produzidas no período t.
- $R_t$     Total de horas regulares utilizadas no período t.
- $V_t$     Total de horas extras utilizadas no período t.
- $I_{it}$     Unidades do item i estocadas no período t até t+1.
- $Y_{it}$     Variável binária, indicando a produção ou não do item i no período t.



Índices:

$t = 1, \dots, T$  Períodos de tempo.

$i = 1, \dots, N$  Itens.

Formulação do Problema:

$$\min \sum_i \sum_t H_{it} I_{it} + \sum_t c_{rt} R_t + \sum_t c_{vt} V_t + \sum_i \sum_t S_i Y_{it} \quad (1.18)$$

sujeito a:

$$I_{it-1} - I_{it} + X_{it} \geq d_{it} \quad \forall i, t \quad (1.19)$$

$$X_{it} - m_{it} Y_{it} \leq 0 \quad \forall i, t \quad (1.20)$$

$$\sum_i (b_i X_{it} + s_i Y_{it}) - R_t - V_t \leq 0 \quad \forall t \quad (1.21)$$

$$R_t \leq w_t \quad \forall t \quad (1.22)$$

$$V_t \leq z_t \quad \forall t \quad (1.23)$$

$$Y_{it} = \begin{cases} 1, & \text{se } X_{it} > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i, t \quad (1.24)$$

$$I_{it}, X_{it}, R_t, V_t \geq 0 \quad \forall i, t \quad (1.25)$$

Na formulação acima, a função objetivo (1.18) minimiza a soma dos custos de produção, estoque e preparação. As restrições (1.19) são de balanceamento de estoque. As restrições (1.21) garantem uma quantidade apropriada de horas regulares e horas extras por período para um dado plano de produção. As restrições (1.22) e (1.23) são devido a limitação de capacidade. As restrições (1.20) e (1.24) asseguram que o tempo e o custo de preparação são considerados apenas quando existe produção e, por fim (1.25) são restrições de não negatividade.

## 1.4 Motivações Para o Estudo de Problemas Monoestágios

Como já foi dito anteriormente, além de ter um grande número de aplicações, os problemas monoestágios aparecem como subproblemas de problemas mais gerais. Por exemplo,

muitos métodos de resolução desenvolvidos para problemas multiestágios, envolvem a resolução de uma seqüência de problemas monoestágios. Apresenta-se nesta seção, apenas um exemplo de um método de resolução para problemas multiestágios que implica na resolução de problemas monoestágios, outros exemplos são citados na revisão bibliográfica contida em Berretta (1997).

Inicialmente, será apresentada uma formulação do problema multiestágio em termos de estoque convencional, a seguir tem-se uma reformulação em termos de estoque de escalão. O problema reformulado pode ser então relaxado, utilizando-se a técnica de relaxação Lagrangiana, o que torna o problema multiestágio decomponível em vários problemas monoestágios, possibilitando a aplicação de métodos de resolução desenvolvidos para problemas monoestágios.

- **Estoque convencional**

Uma formulação em estoque convencional para o problema multiestágio é a seguinte:

*Problema de Dimensionamento de Lotes Multiestágio/Multi-Itens com Restrição de Capacidade*  
Billington *et al.* (1983):

Os seguintes dados são utilizados no problema:

- $c_{it}$  Custo unitário de produção do item  $i$  no período  $t$ .
- $S_{it}$  Custo de preparação para a produção do item  $i$  no período  $t$ .
- $H_{it}$  Custo unitário de estocagem do item  $i$  no período  $t$ .
- $b_i$  Tempo necessário para produzir uma unidade do item  $i$ .
- $s_i$  Tempo de preparação para a produção do item  $i$ .
- $CAP_t$  Limite de capacidade (em unidades de tempo) no período  $t$ .
- $d_{it}$  Demanda do item  $i$  no período  $t$ .
- $r_{ij}$  Unidades do item  $i$  necessárias para compor 1 unidade do item  $j$ .
- $M$  Número grande.

As variáveis de decisão são:

- $X_{it}$  Unidades do item  $i$  produzidas no período  $t$ .
- $I_{it}$  Unidades do item  $i$  estocadas no período  $t$ .
- $Y_{it}$  Variável binária, indicando a produção ou não do item  $i$  no período  $t$ .

Índices:

$t = 1, \dots, T$  Períodos de tempo.

$i = 1, \dots, N$  Itens.

Conjuntos:

$S(i)$  – conjunto dos itens sucessores imediatos do item  $i$ .

$P(i)$  – conjunto dos itens predecessores imediatos do item  $i$ .

Formulação do Problema:

$$\min \sum_t \sum_i H_{it} I_{it} + \sum_t \sum_i c_{it} X_{it} + \sum_t \sum_i S_{it} Y_{it} \quad (1.26)$$

*Sujeito a:*

$$I_{i,t-1} + X_{it} = d_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} X_{jt} + I_{it} \quad \forall i, t \quad (1.27)$$

$$\sum_i b_i X_{it} + \sum_i s_i Y_{it} \leq CAP_t \quad \forall t \quad (1.28)$$

$$X_{it} - M Y_{it} \leq 0 \quad \forall i, t \quad (1.29)$$

$$Y_{it} = \begin{cases} 1, & \text{se } X_{it} > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i, t \quad (1.30)$$

$$X_{it} \text{ e } I_{it} \geq 0 \quad \forall i, t \quad (1.31)$$

Observe que a formulação acima é semelhante à formulação (1.12)-(1.17) com exceção das restrições de balanceamento de estoque (1.13) que agora são dadas pelas restrições (1.27), o que faz com que o modelo torne-se não decomponível por item, quando relaxadas as restrições de capacidade, impedindo a utilização direta de técnicas de resolução empregadas a problemas monoestágios. Deve-se observar que, a produção e o estoque de um item devem ser suficientes para suprir a demanda independente, mais, eventualmente, uma quantidade para compor o lote dos itens sucessores.

Para um melhor entendimento, considere o seguinte grafo orientado acíclico (figura 1.1). Observe que, se um item  $i$  é predecessor de  $j$ , implica  $i > j$ . O item 1 é sempre considerado como

item final (pode-se ter diferentes itens finais). A estrutura representada aqui é uma estrutura geral, ou seja, não há restrição quanto ao número de predecessores e sucessores de um item, exceto os itens finais que não possuem sucessores.

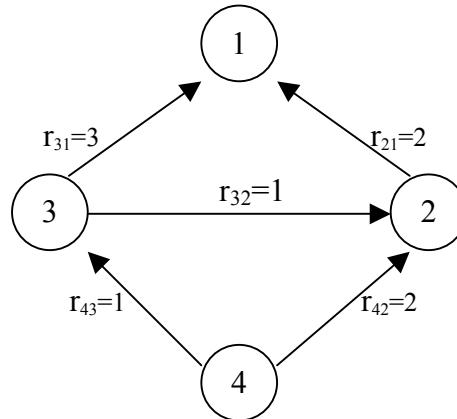


Figura 1.1: Exemplo de estrutura geral de produtos.

Como,

$S(i)$  – conjunto dos itens sucessores imediatos do item  $i$ .

$P(i)$  – conjunto dos itens predecessores imediatos do item  $i$ .

pelo exemplo da estrutura geral acima (Figura 1.1) temos:

$$\begin{array}{llll}
 S(1) = \emptyset & S(2) = \{ 1 \} & S(3) = \{ 1, 2 \} & S(4) = \{ 2, 3 \} \\
 P(1) = \{ 2, 3 \} & P(2) = \{ 3, 4 \} & P(3) = \{ 4 \} & P(4) = \emptyset
 \end{array}$$

Considere que:  $r_{2,1} = 2$ ;  $r_{3,1} = 3$ ;  $r_{3,2} = 1$ ;  $r_{4,2} = 2$ ;  $r_{4,3} = 1$ . Suponha que, num determinado período, foi decidido produzir 10 unidades do item 1, que não haja estoque de qualquer item e que os itens 2, 3 e 4 não tenham demanda independente. Então a produção do item 2 deve ser de pelo menos 20 unidades ( $r_{2,1}X_1=2 \times 10$ ), do item 3 de 50 unidades ( $r_{3,1}X_1 + r_{3,2}X_2=3 \times 10 + 1 \times 20$ ) e do item 4 de pelo menos 90 unidades ( $r_{4,2}X_2 + r_{4,3}X_3 = 2 \times 20 + 1 \times 50$ ).

Portanto, a equação de balanço entre as variáveis de estoque e produção deve determinar que  $X_{it}$  e  $I_{i,t-1}$  devem suprir  $d_{it}$  mais  $\sum_{j \in S(i)} r_{ij} X_{jt}$ .

Uma reformulação do problema (1.26)-(1.31) pode ser obtida adotando-se o conceito de *estoque de escalão* introduzido por Clark e Scarf (1960) e implementado por Afentakis *et al.* (1984).

- **Estoque de escalão**

Estoque de escalão de um item é a quantidade total do item presente no sistema, incluindo a quantidade do item em estoque mais a quantidade do item contida no estoque de seus sucessores.

Como exemplo, considere a estrutura da figura 1.1. A quantidade do item 1 existente no sistema é apenas o seu estoque, já que este não possui sucessor. Logo, seu estoque de escalão é seu próprio estoque convencional,

$$E_{1t} = I_{1t}.$$

O item 2, além de ter seu próprio estoque, está presente no item 1 ( $S(2)=\{1\}$ ), portanto seu estoque de escalão é

$$E_{2t} = I_{2t} + r_{21} I_{1t}.$$

No caso do item 3 tem-se:

$$E_{3t} = I_{3t} + \begin{array}{l} r_{32} I_{2t} + \\ r_{31} I_{1t} + r_{32} r_{21} I_{1t} \end{array} \begin{array}{l} \text{o próprio estoque} \\ \text{quantidade do item 3 no estoque do item 2} \\ \text{quantidade do item 3 no estoque do item 1} \end{array}$$

ou ainda,

$$E_{3t} = I_{3t} + r_{31} E_{1t} + r_{32} E_{2t}.$$

Da mesma maneira para o item 4,

$$E_{4t} = I_{4t} + \begin{array}{l} r_{43} I_{3t} + \\ r_{42} I_{2t} + r_{43} r_{32} I_{2t} + \\ r_{43} r_{32} r_{21} I_{1t} + r_{43} r_{31} I_{1t} + r_{42} r_{21} I_{1t} \end{array}$$

ou ainda,

$$E_{4t} = I_{4t} + r_{42} E_{2t} + r_{43} E_{3t}.$$

Portanto, o estoque de escalão do item  $i$  no período  $t$  é definido como:

$$E_{it} = I_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{jt} \quad (1.32)$$

Será definido agora o *custo de estoque de escalão* em termos de custo de estoque convencional.

- **Custo de estoque de escalão**

O custo de estoque de escalão deve ser definido de modo que seja mantida a equivalência:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T e_{it} E_{it} = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T h_{it} I_{it}$$

Desenvolvendo a fórmula anterior chega-se à seguinte definição para o custo de estoque de escalão:

$$e_{it} = H_{it} - \sum_{j \in P(i)} r_{ij} H_{jt} \quad (1.33)$$

Observe que, a definição de custo de estoque de escalão foi dada a partir da definição de custo de estoque convencional, de modo que se tenha um abatimento dos custos de estoque convencional de itens predecessores, pois, de acordo com a definição de estoque de escalão, os custos dos itens predecessores já teriam sido calculados.

- **Reformulação do problema em termos de estoque de escalão**

O modelo (1.26)-(1.31) pode ser reformulado em termos de estoque de escalão. Inicialmente, serão examinadas as restrições de balanço (1.27) entre as variáveis de estoque e produção. Como ilustração, considere a equação do item 2, para a estrutura da figura 1.1. Utilizando estoque convencional, a equação de balanço é dada por:

$$I_{2,t-1} + X_{2t} - I_{2t} = d_{2t} + r_{21} X_{1t}$$

sendo  $X_{1t}$  determinado a partir de

$$I_{1,t-1} + X_{1t} - I_{1t} = d_{1t}.$$

Substituindo esta última equação na anterior tem-se

$$I_{2,t-1} + r_{21} I_{1,t-1} + X_{2t} - I_{2t} - r_{21} I_{1t} = d_{2t} + r_{21} d_{1t},$$

isto é,

$$E_{2,t-1} + X_{2t} - E_{2t} = d_{2t} + r_{21} d_{1t}.$$

Observe que a equação de balanço utilizando estoque de escalão não depende do tamanho dos lotes dos itens sucessores, mas sim, de suas demandas.

Definindo *demandas de escalão* como a contabilização das demandas independentes e dependentes (a demanda dos itens sucessores),

$$D_{it} = d_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} D_{jt}$$

a equação de balanço de estoque utilizando estoque de escalão pode ser generalizada como:

$$E_{i,t-1} + X_{it} - E_{it} = D_{it}.$$

Falta impor que o estoque de um item seja maior que zero ( $I_{it} \geq 0$ ). Pela definição de  $E_{it}$  dada em (1.32) tem-se,

$$E_{it} \geq \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{jt} ,$$

ou seja, o estoque de escalão do item  $i$  no período  $t$  deve ser suficiente para suprir o estoque de escalão de seus itens sucessores.

Obtém-se então, a seguinte formulação em estoque de escalão:

$$\min \sum_t \sum_i e_{it} E_{it} + \sum_t \sum_i c_{it} X_{it} + \sum_t \sum_i S_{it} Y_{it} \quad (1.34)$$

*Sujeito a:*

$$E_{i,t-1} + X_{it} - E_{it} = D_{it} \quad \forall i, t \quad (1.35)$$

$$\sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{jt} - E_{it} \leq 0 \quad \forall i, t \quad (1.36)$$

$$\sum_i b_i X_{it} + \sum_i s_i Y_{it} \leq CAP_t \quad \forall t \quad (1.37)$$

$$X_{it} - M Y_{it} \leq 0 \quad \forall i, t \quad (1.38)$$

$$Y_{it} = \begin{cases} 1, & \text{se } X_{it} > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i, t \quad (1.39)$$

$$X_{it} \text{ e } E_{it} \geq 0 \quad \forall i, t \quad (1.40)$$

Utilizando o conceito de estoque de escalão, retira-se a dependência entre os itens que aparece nas restrições (1.27) do modelo (1.26)-(1.31). A dependência encontra-se agora nas restrições (1.36) do modelo (1.34)-(1.40). Entretanto, observe que, o modelo (1.34)-(1.40) sem as restrições (1.36) torna-se exatamente o modelo monoestágio (1.12)-(1.17) apresentado por Trigeiro *et al.* (1989). Assim, aplicando-se a técnica de relaxação Lagrangiana às restrições (1.36), pode-se utilizar os métodos de resolução para problemas monoestágios.

Diante disso, chega-se ao objetivo desta seção, que era exemplificar a utilidade do problema monoestágio para resolução de problemas mais gerais, justificando assim a preocupação com o estudo e o desenvolvimento de algoritmos eficientes para este tipo de problema.

---

---

## CAPÍTULO 2:

### Métodos Básicos de Dimensionamento de Lotes

---

---

#### 2.1 Introdução

Neste capítulo serão descritos alguns métodos básicos de solução para problemas de dimensionamento de lotes com um único item sem restrição de capacidade. Inicialmente, apresenta-se alguns métodos heurísticos, começando pelo método Lote-por-Lote, seguido pelas heurísticas de Silver-Meal, do Custo Unitário Mínimo e a de Balanço por Partes. No final, apresenta-se o método ótimo proposto por Wagner e Whitin (1958), o qual será bastante utilizado em outros procedimentos de solução descritos nos próximos capítulos. Será feita ainda uma comparação entre os métodos, mostrando a superioridade do método ótimo de Wagner e Whitin (1958). Os estudos destes métodos foram baseados em Wagner e Whitin (1958), Johnson e Montgomery (1974), Hillier e Lieberman (1988) e Nahmias (1989).

#### 2.2 Heurísticas

Considere um horizonte de planejamento de  $T$  períodos, onde as demandas para cada período são conhecidas ( $d_1, d_2, \dots, d_T$ ). Um único lote pode ser produzido em cada período e  $X_t$  representa o tamanho do lote produzido no período  $t$ . Considere os seguintes custos: custo de preparação no período  $t$  ( $S_t$ ), custo unitário de produção no período  $t$  ( $c_t$ ) e o custo unitário de estocagem do período  $t$  para o período  $t+1$  ( $H_t$ ). O custo unitário de produção ( $c_t$ ) será considerado constante e, por isso, poderá ser omitido sem prejuízo do resultado final. Suponha que  $I_0 = I_T = 0$ , onde  $I_t$  é a quantidade estocada no período  $t$ .



- **Lote-por-Lote:**

Esta heurística consiste no método mais básico possível, onde a quantidade produzida visa atender somente o período em que o item será utilizado. Sendo assim, o estoque será sempre nulo e serão feitas preparações de máquina em todos os períodos com demanda positiva.

- **Heurística de Silver-Meal**

Considere  $C(t)$  como sendo o custo total de produção até o período  $t$ , dividido por  $t$ . Assim, se no período 1 for produzido uma quantidade visando atender somente a demanda deste período, não existirá então o custo de estocagem ( $H_1$ ), mas somente um custo de preparação ( $S_1$ ). Logo:

$$C(1) = S_1$$

No entanto, se no período 1 a produção visa atender as demandas dos períodos 1 e 2, existirá um custo de estocagem sobre a quantidade  $d_2$ , relativa à demanda do período 2. Ou seja:

$$C(2) = (S_1 + H_1 d_2)/2$$

De maneira análoga:

$$C(3) = (S_1 + H_1 d_2 + (H_1 + H_2) d_3)/3$$

Em geral:

$$C(t) = \frac{S_1 + H_1 d_2 + (H_1 + H_2) d_3 + \dots + (H_1 + H_2 + \dots + H_{t-1}) d_t}{t} \quad \text{onde } t \leq T$$

Quando  $C(t) > C(t-1)$  o processo é interrompido e produz-se uma quantidade visando atender as demandas dos períodos 1, 2, ...,  $t-1$ , ou seja,  $X_1 = d_1 + d_2 + \dots + d_{t-1}$ . Posteriormente, o processo continua novamente a partir do período  $t$ .

- **Heurística do Custo Unitário Mínimo**

É idêntica à heurística de Silver-Meal mas, ao invés de dividir pelo período  $t$ , divide-se pela demanda total até o período  $t$  ( $d_1 + d_2 + \dots + d_t$ ). Ou seja:

$$C(1) = S_1/d_1$$

$$C(2) = (S_1 + H_1d_2)/(d_1 + d_2)$$

$$C(t) = \frac{S_1 + H_1d_2 + (H_1 + H_2)d_3 + \dots + (H_1 + H_2 + \dots + H_{t-1})d_t}{d_1 + d_2 + \dots + d_t} \quad \text{onde } t \leq T$$

- **Heurística de Balanço por Partes**

Nesta heurística, inicia-se no primeiro período de planejamento e evolui-se em direção ao período final. Para cada período, calcula-se o custo de estocagem e soma-se aos custos de estocagem dos períodos anteriores. Quando esta soma for maior que o custo de preparação (que deve ser fixo), o processo é interrompido e é feita uma comparação entre os períodos para verificar em qual deles a soma dos custos de estocagem está mais próxima do custo fixo de preparação. Os pedidos deverão atender a projeção de demanda até este período. Em seguida, inicia-se novamente no período seguinte e o processo se repete.

### 2.3 O método ótimo de Wagner e Whitin

Este método baseia-se na seguinte propriedade de otimalidade para o problema em questão:  $I_{t-1} X_t = 0$  para  $t=1, \dots, T$  (Johnson e Montgomery, 1974). Isto significa que a demanda de um período  $t$  deve ser satisfeita completamente com a produção do período  $t$  ( $X_t$ ), ou com o estoque do período  $t-1$  ( $I_{t-1}$ ). Assim, a quantidade produzida num determinado período deve ser exatamente igual a soma de um conjunto de futuras demandas, ou seja:

$$X_1 = d_1 \quad \text{ou} \quad X_1 = d_1 + d_2 \dots \quad \text{ou} \quad X_1 = d_1 + d_2 + \dots + d_T$$

$$X_2 = 0 \quad \text{ou} \quad X_2 = d_2 \quad \text{ou} \quad X_2 = d_2 + d_3 \dots \quad \text{ou} \quad X_2 = d_2 + d_3 + \dots + d_T$$

$$X_3 = 0 \quad \text{ou} \quad X_3 = d_3 \quad \text{ou} \quad X_3 = d_3 + d_4 \dots \quad \text{ou} \quad X_3 = d_3 + d_4 + \dots + d_T$$

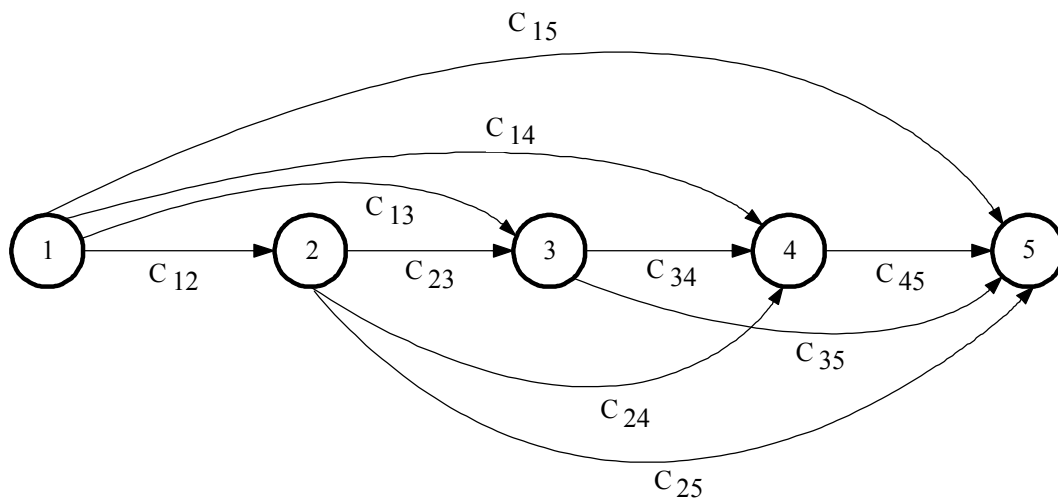
$$X_T = 0 \quad \text{ou} \quad X_T = d_T$$

Para um melhor entendimento do método, tem-se um exemplo onde se supõe que os custos considerados são: o custo de preparação ( $S_t$ ) cobrado no início do período, um custo de

manutenção de estoque ( $H_t$ ) que será cobrado no final de cada período e, um custo unitário de produção ( $c_t$ ), o qual será considerado constante, independentemente da quantidade e do período em que se está produzindo, por isso, poderá ser omitido obtendo-se o mesmo resultado.

*Exemplo 2.1:* Certa firma que fabrica um determinado produto deseja fazer um planejamento da produção para um horizonte de quatro semanas. Sabe-se que a demanda para estas quatro semanas será de 104, 174, 46 e 112 unidades. Suponha que a firma faça no máximo uma preparação de máquina a cada semana e que não haja restrição de capacidade de produção.

Associando os quatro períodos a uma rede com cinco nós, o arco  $arc(t,j)$  para  $t < j$  está associado ao custo total ( $C_{t,j}$ ) para produzir uma quantidade que atenda as demandas do período  $t$  até o período  $j-1$ , ou seja,  $C_{1,5}$  = custo total para produzir no período 1 uma quantidade que satisfaça as demandas da semana 1 até a semana 4.



O método de Wagner e Whitin consiste numa técnica de programação dinâmica, onde a solução ótima é obtida utilizando-se do seguinte sistema de equações:

$$f_t = \min_{j>t} (C_{t,j} + f_j) \text{ para } t = 1, \dots, T \quad (2.1)$$

Condição final:  $f_{T+1} = 0$

Observe que,  $f_t$  é o custo mínimo para o período de planejamento  $t$ .

Para resolver o exemplo 2.1 através desta fórmula, primeiramente deve-se calcular os custos  $C_{t,j}$ , os quais serão usados na fórmula. Observe que estes custos são dados por:

$$C_{t,j} = S_t + H_t d_{t+1} + (H_t + H_{t+1})d_{t+2} + (H_t + H_{t+1} + H_{t+2})d_{t+3} + \dots + (H_t + H_{t+1} + \dots + H_{j-2})d_{j-1}$$

para  $t = 1, 2, \dots, T$  e  $j = t+1, t+2, \dots, (T+1)$ .

Para este exemplo tem-se:  $t=1, 2, 3, 4$  e  $j=2, 3, 4, 5$ .

Considerando  $S_t = \$150,00$  ( $\forall t$ ) por preparação e  $H_t = \$2,00$  ( $\forall t$ ) por unidade estocada a cada período, tem-se:

$$C_{1,2} = 150$$

$$C_{1,3} = 150 + 2 \times 174 = 498$$

$$C_{1,4} = 150 + 2 \times [174 + (46 \times 2)] = 682$$

$$C_{1,5} = 150 + 2 \times [174 + (46 \times 2) + (112 \times 3)] = 1354$$

$$C_{2,3} = 150$$

$$C_{2,4} = 150 + 2 \times 46 = 242$$

$$C_{2,5} = 150 + 2 \times [46 + (112 \times 2)] = 690$$

$$C_{3,4} = 150$$

$$C_{3,5} = 150 + 2 \times 112 = 374$$

$$C_{4,5} = 150$$

Determinado os custos, o próximo passo é obter o custo mínimo de planejamento para cada período através da aplicação da fórmula (2.1):

$$f_5 = 0$$

$$f_4 = \min_{j>4} (C_{4,j} + f_j) = \min(C_{4,5} + f_5) = 150 \text{ ( neste caso só há uma opção)}$$

- o mínimo ocorre em  $j = 5$

$$f_3 = \min_{j>3} (C_{3,j} + f_j) = \min \begin{Bmatrix} C_{3,4} + f_4 \\ C_{3,5} + f_5 \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 150 + 150 \\ 374 + 0 \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 300 \\ 374 \end{Bmatrix} = 300$$

- o mínimo ocorre em  $j = 4$

$$f_2 = \min_{j>2} (C_{2,j} + f_j) = \min \begin{cases} C_{2,3} + f_3 \\ C_{2,4} + f_4 \\ C_{2,5} + f_5 \end{cases} = \min \begin{cases} 150 + 300 \\ 242 + 150 \\ 690 + 0 \end{cases} = \min \begin{cases} 450 \\ 392 \\ 690 \end{cases} = 392$$

- o mínimo ocorre em  $j = 4$

$$f_1 = \min_{j>1} (C_{1,j} + f_j) = \min \begin{cases} C_{1,2} + f_2 \\ C_{1,3} + f_3 \\ C_{1,4} + f_4 \\ C_{1,5} + f_5 \end{cases} = \min \begin{cases} 150 + 392 \\ 498 + 300 \\ 682 + 150 \\ 1354 + 0 \end{cases} = \min \begin{cases} 542 \\ 798 \\ 832 \\ 1354 \end{cases} = 542$$

- o mínimo ocorre em  $j = 2$

Diante disso, para encontrar uma política de produção ótima basta verificar os cálculos, ou seja, na semana 1 o valor ótimo de  $j$  é  $j = 2$ , isto significa que a quantidade produzida na semana 1 deve ser igual a demanda da semana 1 ( $X_1 = d_1 = 104$ ). Na semana 2 o valor ótimo de  $j$  é  $j = 4$ , logo a quantidade produzida na semana 2 deve ser igual a demanda da semana 2 mais a demanda de semana 3 ( $X_2 = d_2 + d_3 = 174 + 46 = 220$ ). O próximo período é a semana 4, na qual o valor ótimo de  $j$  é  $j = 5$  o que implica em  $X_4 = d_4 = 112$ . Assim, a política ótima para este exemplo pode ser denotada por  $X = (104, 220, 0, 112)$ .

A tabela 2.1 mostra os resultados do custo total para os vários métodos descritos anteriormente, ficando evidente a superioridade do método ótimo de Wagner e Whitin. O cálculo desses resultados foram feitos com base no seguinte exemplo:

*Exemplo 2.2:* Deseja-se produzir um determinado produto P, o qual demora quatro semanas para ser produzido (*lead time* = 4). Pretende-se fazer um plano de produção para o produto P, da semana 8 até a 17. A previsão de demanda para estas semanas é conhecida e é dada pela seguinte tabela:

Semana	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
<b>Demanda Liq.</b>	42	42	32	12	26	112	45	14	76	38

O custo de preparação da produção ( $S_t$ ) deste produto é igual a \$132,00 para qualquer semana  $t$ , além disso, o custo unitário de estocagem ( $H_t$ ) é de \$0,60 por semana ( $\forall t$ ).

A tabela de comparação dos resultados é apresentada a seguir:

	Custo total (\$)
Lote-por-Lote	1.320,00
Heurística de Silver-Meal	650,40
Heurística do custo unitário mínimo	718,80
Heurística de balanço por partes	693,60
Solução ótima (Wagner e Whitin)	610,20

Tabela 2.1: Comparação dos métodos.

Cabe ainda observar que, atualmente existem algumas implementações mais eficientes do método de Wagner e Whitin (1958), por exemplo, Evans (1985). Em Wolsey (1995), pode ser encontrada uma revisão bibliográfica, mostrando o avanço dos métodos de resolução para problemas com um único item sem restrição de capacidade.

---

---

## CAPÍTULO 3:

# Uma Abordagem Heurística para o Problema de Dimensionamento de Lotes Monoestágio com Restrição de Capacidade

---

---

### 3.1 Introdução

Neste capítulo será apresentado uma revisão do artigo de Trigeiro *et al.* (1989), onde o problema de dimensionamento de lotes monoestágio com restrição de capacidade é modelado e, um método de solução é proposto. Tem-se ainda, uma proposta de mudança no método desenvolvido por Trigeiro *et al.* (1989), bem como os resultados computacionais obtidos após a implementação das duas versões do método: a versão original e a versão modificada.

O método desenvolvido por Trigeiro *et al.* (1989) é um método heurístico que consiste em relaxar as restrições de capacidade (1.14) utilizando a técnica de relaxação Lagrangiana (ver apêndice), obtendo-se vários subproblemas, um para cada item, sem restrição de capacidade. Estes subproblemas são resolvidos por programação dinâmica utilizando o algoritmo de Wagner e Whitin (Wagner e Whitin, 1958), descrito no capítulo anterior. O valor da solução do problema relaxado, constitui um limitante inferior para o problema original. Em geral, a solução do problema relaxado é infactível para o problema original, pois viola as restrições de capacidade. Aplica-se então, uma heurística que transfere a produção entre períodos, na tentativa de obter uma solução factível. Por fim, a atualização dos multiplicadores de Lagrange é feita utilizando-se o método de otimização do subgradiente (ver apêndice).

Custos e tempos de preparação são considerados no modelo e, além disso, os custos e a demanda não são constantes no tempo. No entanto, mesmo modelando para custos variáveis, Trigeiro *et al.* (1989) consideraram todos os custos constantes no tempo em suas implementações.

O modelo não considera seqüenciamento de trabalho, sendo indiferente a ordem em que os itens estão sendo produzidos dentro de um período. Assim, se o último item a ser produzido no período  $t$  for o item  $i$  e, o primeiro item a ser produzido no período  $t+1$  também for o item  $i$ , o modelo considera que foi necessário um tempo de preparação:  $Y_{i,t+1}=1$ . Os autores observam que, em alguns problemas práticos onde o número de itens é muito grande, o fato de não se considerar o seqüenciamento não influencia muito no resultado, pois a porcentagem de tempo de preparação, que é incorretamente calculada, é pequena em relação ao tempo de preparação total.

A formulação está contida no capítulo 1 e é dada pelas equações (1.12)-(1.17). Para facilitar a leitura, o modelo é reproduzido aqui:

Modelo (1.12)-(1.17):

$$\min \sum_t \sum_i H_{it} I_{it} + \sum_t \sum_i c_{it} X_{it} + \sum_t \sum_i S_{it} Y_{it} \quad (1.12)$$

*Sujeito a:*

$$I_{i,t-1} + X_{it} - I_{it} = d_{it} \quad \forall i, t \quad (1.13)$$

$$\sum_i b_i X_{it} + \sum_i s_i Y_{it} \leq CAP_t \quad \forall t \quad (1.14)$$

$$X_{it} - MY_{it} \leq 0 \quad \forall i, t \quad (1.15)$$

$$Y_{it} = \begin{cases} 1, & \text{se } X_{it} > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i, t \quad (1.16)$$

$$X_{it} \text{ e } I_{it} \geq 0 \quad \forall i, t \quad (1.17)$$

### 3.2 Algoritmo Geral

Nesta seção, um algoritmo geral é apresentado seguido de alguns comentários e, nas próximas seções serão discutidos alguns dos passos propostos no algoritmo.



Passo 0: Atribua valores iniciais aos multiplicadores de Lagrange. Faça  $k=0$  ;

Passo 1: (Passo Primal). Aplique a Relaxação Lagrangiana às restrições de capacidade (1.14), obtendo subproblemas independentes por item. Para cada item, resolva o subproblema por programação dinâmica (Wagner e Whitin, 1958) e obtenha uma solução;

Passo 2: (Heurística Lagrangiana). Se a solução obtida for infactível:

Então: Tente determinar uma solução factível próxima a solução encontrada no passo 1;

Passo 3: (Passo Dual). Atualize os multiplicadores de Lagrange pelo método de otimização do subgradiente. Faça  $k \leftarrow k+1$ . Vá para o passo 1.

Repita os passos 1 a 3, até que sejam feitas 150 iterações.

Observe que a cada iteração, o passo 1 produz um limitante inferior para o valor ótimo da função objetivo. A utilização do método do subgradiente no passo 3 garante que o algoritmo produzirá, no limite, o melhor (maior) limitante inferior. No entanto, em se tratando de programação inteira, tem-se que o valor do melhor limitante inferior pode ser menor que o valor ótimo da função objetivo do problema original, devido ao chamado “*gap de dualidade*”, que consiste na diferença entre o valor ótimo da função objetivo do problema dual Lagrangiano (melhor limitante inferior) e o valor ótimo da função objetivo do problema original.

A avaliação da qualidade da solução obtida é feita através do “*gap*”, ou seja, da diferença entre o valor da função objetivo para melhor solução factível encontrada e o valor do limitante inferior. Quando esta diferença é pequena, pode-se dizer que o valor da função objetivo obtido pela solução factível está próximo do valor ótimo. No entanto, quando o “*gap*” é alto, não se pode afirmar se o valor obtido pela solução factível está longe do valor ótimo, ou se existe um grande “*gap de dualidade*”.

### **3.3 Obtenção do Limitante Inferior (Passo 1)**

Para se obter um limitante inferior para o problema, aplica-se a técnica de relaxação Lagrangiana descrita na fundamentação teórica contida no apêndice. Ao aplicar a relaxação

Lagrangiana às restrições de capacidade (1.14), o problema (1.12)-(1.17) passa a ser escrito da seguinte forma:

*Problema Lagrangiano:*

$$\min \sum_t \sum_i H_{it} I_{it} + \sum_t \sum_i (c_{it} + \lambda_t^k b_i) X_{it} + \sum_t \sum_i (S_{it} + \lambda_t^k s_i) Y_{it} - \sum_t \lambda_t^k CAP_t \quad (3.1)$$

*Sujeito a:*

$$I_{i,t-1} + X_{it} - I_{it} = d_{it} \quad \forall i, t \quad (3.2)$$

$$X_{it} - M Y_{it} \leq 0 \quad \forall i, t \quad (3.3)$$

$$Y_{it} = \begin{cases} 1, & \text{se } X_{it} > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i, t \quad (3.4)$$

$$X_{it} \text{ e } I_{it} \geq 0 \quad \forall i, t \quad (3.5)$$

Observe que as únicas restrições que ligavam os itens eram as restrições de capacidade (1.14). Assim, o problema relaxado (3.1)-(3.5) pode ser decomposto item a item, obtendo-se vários subproblemas, um para cada item, sem restrições de capacidade. Isto torna possível a utilização da técnica de programação dinâmica de Wagner e Whitin (1958), a qual é aplicada em cada um dos subproblemas separadamente. As soluções para estes subproblemas são agrupadas e, em geral, a solução resultante deste agrupamento não é factível para o problema (1.12)-(1.17), devido ao fato de não estarem sendo consideradas as restrições de capacidade. O valor da função objetivo para a solução do problema relaxado (3.1)-(3.5) produzirá um limitante inferior para o problema original (1.12)-(1.17).

### 3.4 Heurística de Factibilização (Passo 2)

Como mencionado anteriormente, em geral, a solução encontrada pelo algoritmo de programação dinâmica é infactível. A ideia da heurística de factibilização é fazer pequenas mudanças na solução obtida pelo passo 1, tentando ajustar os lotes de acordo com a capacidade

disponível em cada período, ou seja, a heurística tenta eliminar a violação da restrição de capacidade.

O procedimento tem no máximo quatro passos, descritos a seguir. Se a violação não for eliminada, o procedimento é abandonado, as variáveis duais são atualizadas e, um novo problema Lagrangiano é resolvido produzindo outra solução.

Os passos são os seguintes:

- **1º Passo regressivo:**

Este passo é iniciado no fim do horizonte de planejamento e evolui em direção aos períodos anteriores. Se houver violação de capacidade em um período, cada item com produção positiva é avaliado, com o objetivo de verificar qual é o mais adequado para ser transferido. O item mais adequado é aquele que tem o menor custo por unidade de violação eliminada.

Para transferir um item  $i$  de um determinado período  $t$  tem-se:

Se o tamanho do lote do item  $i$  no período  $t$  não for maior do que a violação do período  $t$ , duas opções são consideradas:

- Mover todo o lote para o período imediatamente anterior ( $t-1$ ).
- Mover todo o lote para outro período anterior ( $t-j$ , com  $j>1$ ), onde  $t-j$  é o primeiro período anterior no qual o item  $i$  já esteja sendo produzido. Assim, evita-se os custos associados a uma preparação.

No entanto, se o tamanho do lote é maior do que a violação, três diferentes combinações de quantidade e períodos são considerados para a transferência:

- Mover somente a quantidade necessária para eliminar a violação para o período  $t-1$ .
- Mover somente a quantidade necessária para eliminar a violação para o período  $t-j$ .
- Mover todo o lote para o período  $t-j$ .

Cabe observar que, transferir mais do que o necessário para eliminar a violação para um período anterior será considerado somente se não houver violação da capacidade deste período anterior.

O item de menor custo é transferido de acordo com um dos procedimentos descritos acima. Se persistir a violação no período  $t$ , um outro item é escolhido e o processo é repetido até que a violação do período seja eliminada. O mesmo processo é aplicado ao período anterior ( $t-1$ ) e assim por diante, até o período 2. Observe que, ao final do passo regressivo tem-se uma solução factível, exceto possivelmente para o primeiro período.

- **1º Passo progressivo:**

Este passo é iniciado no começo do horizonte de planejamento e evolui em direção aos períodos posteriores. O período alvo é sempre o imediatamente posterior e a quantidade transferida é o estoque  $I_{it}$ . Os itens que podem ser transferidos são:

- Os itens que foram agrupados pelo algoritmo de Wagner e Whitin (1958).
- Aqueles que foram transferidos pelo primeiro passo regressivo.

As transferências terminam quando as *violações acumuladas* forem eliminadas para todos os períodos, ou seja, as necessidades acumuladas até o período  $t$  forem menores ou iguais à capacidade acumulada até o mesmo período (para todo  $t$ ):

$$\sum_{\tau=1}^t (\sum_i b_i X_{i\tau} + \sum_i s_i Y_{i\tau}) \leq \sum_{\tau=1}^t CAP_{\tau} \quad \text{para todo } t \quad (3.6)$$

Observe que a desigualdade acima não implica na eliminação da violação de todos os períodos de  $1, \dots, t$ . Pois, para um dado período  $t'$  onde  $1 < t' \leq t$ , pode ocorrer que:

$$\sum_i b_i X_{it'} + \sum_i s_i Y_{it'} > CAP_{t'} \quad \text{onde } 1 < t' \leq t \quad (3.7)$$

Observe ainda que nenhuma tentativa é feita para evitar violação no período alvo. No entanto, não são permitidos atrasos na produção.

- **2º Passo regressivo:**

Idêntico ao primeiro, exceto pelo seu estado inicial que é determinado pelo resultado dos dois primeiros passos.

- **2º Passo progressivo:**

Mais rigoroso do que o primeiro. No primeiro a produção é enviada para períodos posteriores até que as *violações acumuladas* sejam eliminadas. Neste segundo passo progressivo continua-se trabalhando no período até que toda a *violação* seja eliminada. A diferença entre violação acumulada e violação, pode ser vista pelas equações (3.6) e (3.7).

Se ao final deste passo não for encontrada uma solução factível, retorna-se ao programa principal a mensagem de que não pôde ser encontrada uma solução factível e, o algoritmo continua com a atualização dos multiplicadores de Lagrange.

Quando uma solução factível é encontrada, aplica-se um procedimento de melhoria da solução (arranjo final) com o objetivo de eliminar estoques desnecessários. Trigeiro *et al.* (1989) argumentam que este procedimento é necessário pois, nenhum cuidado foi tomado para manter a propriedade  $I_{i,t-1}X_{it}=0$  (idéia básica do método de Wagner e Whitin (1958)).

• **Arranjo Final ou Procedimento de Melhoria:**

Iniciando com uma solução factível, os períodos são processados em ordem decrescente. Períodos sem folga de capacidade são ignorados e, em um período t com folga de capacidade, todos os itens que são produzidos são analisados, selecionando aqueles em que  $I_{i,t-1}X_{it} \neq 0$ , ou seja, seleciona-se os itens que estejam sendo estocados do período anterior (t-1) e, estejam sendo produzidos no período atual (t).

Assim, escolhido um item k, a produção deste item é acrescida em t e decrescida em t-j (onde t-j é o período “anterior” para o qual o estoque final é positivo para todos os períodos desde t-j até t-1 inclusive). Isto vai sendo feito até que não haja mais folga no período t ou que o estoque seja eliminado em algum período. Ou seja, a quantidade produzida que será acrescida em t é:

$$\delta = \min \{ I_{k,t-h}, h=1, \dots, j; \text{Folga}(t)/b_k \} \text{ onde } \text{Folga}(t) = CAP_t - \sum_i b_i X_{it} - \sum_i s_i Y_{it}$$

O arranjo final modifica as equações de balanceamento de estoque para o item k. Matematicamente, estas modificações podem ser escritas da seguinte forma:

Período	Equações
t-j	$(X_{k,t-j} - \delta) + 0 = d_{k,t-j} + (I_{k,t-j} - \delta)$
.....	.....
t-2	$X_{k,t-2} + (I_{k,t-3} - \delta) = d_{k,t-2} + (I_{k,t-2} - \delta)$
t-1	$X_{k,t-1} + (I_{k,t-2} - \delta) = d_{k,t-1} + (I_{k,t-1} - \delta)$
t	$(X_{kt} + \delta) + (I_{k,t-1} - \delta) = d_{kt} + I_{kt}$

Em resumo, este arranjo transfere produção do item  $k$ , no período  $t-j$ , para o período  $t$ , mantendo a factibilidade da solução.

### 3.5 Atualização dos Multiplicadores de Lagrange (Passo 3)

A atualização dos multiplicadores de Lagrange é feita utilizando o método de otimização do subgradiente, descrito na fundamentação teórica contida no apêndice. A direção do subgradiente é dada pela restrição de capacidade e é exponencialmente suavizada (Camerini *et al.*, 1975). Trigeiro *et al.* (1989) fazem apenas alguns comentários com respeito ao método de otimização do subgradiente, de modo que, não descrevem exatamente a maneira como este método é utilizado.

### 3.6 Um Novo “Arranjo Final” para o Método de Trigeiro *et al.* (1989)

Como foi visto na seção 3.4, a heurística de factibilização desenvolvida por Trigeiro *et al.* (1989) consiste basicamente em quatro passos iniciais (dois regressivos e dois progressivos). Caso seja possível encontrar uma solução factível nesses quatro passos iniciais, tem-se ainda um quinto passo que consiste num procedimento de melhoria da solução encontrada e é denominado *arranjo final*.

O objetivo desta seção consiste em propor um novo arranjo final para o método desenvolvido por Trigeiro *et al.* (1989). Esta nova proposta será feita com base nas seguintes observações:

- 1) O “arranjo final” proposto por Trigeiro *et al.* (1989) tenta satisfazer a propriedade  $I_{i,t-1}X_{it}=0 \forall i,t$ . Assim, dado um determinado item  $k$  com  $I_{k,t-1}X_{kt} \neq 0$  onde  $t$  é um período com folga de capacidade, a produção deste item  $k$  é incrementada no período  $t$ , fazendo com que o estoque do item  $k$  no período  $t-1$  seja diminuído e, conseqüentemente os custos de estocagem também serão diminuídos. No entanto,  $I_{t-1}X_t=0 \forall t$  é propriedade de otimalidade para o problema com um único item e sem restrição de capacidade (veja seção 2.3) mas, o problema que se tem, após a aplicação da heurística, consiste num problema com vários itens e com restrição de capacidade, de modo que, a propriedade acima deixa de ser uma propriedade de otimalidade.

- 2) Como o modelo (1.12)-(1.17) considera que todos os custos podem variar a cada item e a cada período, o procedimento de melhoria proposto por Trigeiro *et al.* (1989) pode vir a piorar a solução obtida pelos quatro passos iniciais da heurística de factibilização. Veja o seguinte exemplo onde se tem apenas um item  $k$  e quatro períodos.

Considere: Custo unitário de produção:  $c_{k1}=1, c_{k2}=1, c_{k3}=3, c_{k4}=3$ ;

Custo de preparação:  $S_{kt}=10 \quad t=1,\dots,4$ ;

Custo unitário de estocagem:  $H_{kt}=0.5 \quad t=1,\dots,4$ ;

Suponha que no período 3 exista uma grande folga de capacidade. Suponha ainda, que a demanda e a solução encontrada pelos quatro passos iniciais sejam dadas pela seguinte tabela:

Períodos	1	2	3	4
Demanda	70	<b>50</b>	<b>60</b>	50
Solução (4 passos)	70	<b>70</b>	<b>40</b>	50

Calculando os custos para esta solução, tem-se:

período 1:  $10 + 1(70)=80$

período 2:  $10 + 1(70) + 0.5(20)=\mathbf{90}$

período 3:  $10 + 3(40)=\mathbf{130}$

período 4:  $10 + 3(50)=160$

**Custo total=460**

Como foi suposto anteriormente, o período 3 está com folga de capacidade e, além disso, está violando a propriedade  $I_{k,t-1}X_{kt}=0$ , pois o item  $k$  está sendo produzido no período 3 e está sendo estocado do período 2 para o período 3, ou seja,  $I_{k2}X_{k3} \neq 0$ . Portanto, de acordo com o que foi descrito na seção 3.4 o arranjo final proposto por Trigeiro *et al.* (1989) seria aplicado a este problema e, a nova solução seria a seguinte:

Períodos	1	2	3	4
Demanda	70	<b>50</b>	<b>60</b>	50
Solução (arranjo)	70	<b>50</b>	<b>60</b>	50

Calculando os custos para a nova solução, tem-se:

período 1:  $10 + 1(70)=80$

período 2:  $10 + 1(50) = \mathbf{60}$

período 3:  $10 + 3(60)=\mathbf{190}$

período 4:  $10 + 3(50)=160$

**Custo total=490**

Observe que, para este exemplo, o arranjo final proposto por Trigeiro *et al.* (1989) fez com que o custo total aumentasse de 460 para 490, isto se deu pelo seguinte fato: apesar do arranjo diminuir os custos do período 2, os custos do período 3 aumentaram ainda mais, pois, o custo unitário de produção no período 3 é muito alto. No entanto, vale ressaltar que o exemplo anterior não é um exemplo baseado em algum problema prático e sim, apenas uma forma facilitar o entendimento do que está sendo exposto.

- 3) O arranjo final de Trigeiro *et al.* (1989) só poderá piorar o valor da solução se estiver sendo considerado custo unitário de produção variável no tempo. Caso este custo seja considerado constante no tempo, o arranjo final de Trigeiro *et al.* (1989) nunca vai piorar a solução pois, este arranjo faz a transferência de produção de um período anterior (t-j) para um período posterior (t), onde já está havendo preparação para produção do item transferido. Desta forma, reduz-se o custo de estocagem e, em alguns casos, reduz-se também o custo de preparação do período (t-j). Assim, se o custo unitário de produção for constante no tempo, as transferências só poderão reduzir o custo total. No entanto, se o custo unitário de produção for variável, pode-se transferir produção para um período onde este custo é muito alto, fazendo com que o custo total aumente, como aconteceu no exemplo anterior. Talvez por este motivo, ao implementar o método, Trigeiro *et al.* (1989) consideram todos os custos constantes no tempo, apesar de modelarem o problema com custos variáveis no tempo. Neste trabalho, o método foi implementado para custos variáveis no tempo, seguindo a modelagem do problema. Entretanto, cabe observar que, muitos autores consideram custos constantes no tempo, argumentando que isto é o que acontece na maioria dos problemas práticos.
- 4) Por fim, tem-se a última e mais importante observação que é baseada no *teorema 1* contido no apêndice deste trabalho. Para facilitar a leitura, o teorema será transcrito a seguir. A



notação utilizada será a mesma do apêndice e, logo após o teorema, tem-se alguns comentários.

*Teorema 1* (Geoffrion, 1974): Tem-se que  $z_{IP} = z_{LD}$  se, e somente se, existem  $\lambda^* \geq 0$  e  $x^* \in S$  tal que satisfazem as seguintes condições:

- i.  $z_{LR}(\lambda^*) = z(\lambda^*, x^*)$ ,  $x^*$  é ótima para o problema Lagrangiano  $LR(\lambda)$ .
- ii.  $A^1 x^* \leq b^1$ ,  $x^*$  é factível para o problema original IP.
- iii.  $(\lambda^*)^T (A^1 x^* - b^1) = 0$ ,  $(\lambda^*, x^*)$  satisfaz as condições de folgas complementares.

Tem-se então que  $x^*$  é uma solução ótima do problema original IP se satisfaz as três condições. No entanto, se satisfaz somente (i) e (ii), tem-se que  $x^*$  é uma solução  $\varepsilon$ -ótima para o problema original (IP), onde  $\varepsilon = (\lambda^*)^T (A^1 x^* - b^1)$ .

Diante deste teorema tem-se que: dada uma solução do problema relaxado (3.1)-(3.5), esta solução será ótima para o problema original (1.12)-(1.17) se, e somente se, satisfaz:

- A solução é ótima para o problema relaxado (3.1)-(3.5).
- A solução é factível para o problema original (1.12)-(1.17), ou seja,

$$\sum_i b_i X_{it} + \sum_i s_i Y_{it} \leq CAP_t \quad \forall t.$$

- A solução satisfaz as condições de folgas complementares, ou seja,

$$\lambda_t (CAP_t - \sum_i b_i X_{it} + \sum_i s_i Y_{it}) = 0 \quad \forall t.$$

Na heurística de factibilização desenvolvida por Trigeiro *et al.* (1989) tem-se que, nos quatro passos iniciais somente as duas primeiras propriedades são levadas em consideração, ou seja, tenta-se fazer as transferências de modo a se chegar a uma solução factível para o problema original na qual, o valor da função objetivo do problema relaxado para esta solução factível, esteja o mais próximo possível do valor ótimo da função objetivo do problema relaxado. Posteriormente, o arranjo final proposto por Trigeiro *et al.* (1989) também considera somente as duas primeiras propriedades, somadas à propriedade  $I_{i,t-1} X_{it} = 0$ , ou seja, dado que algum item  $k$  esteja violando esta propriedade ( $I_{k,t-1} X_{kt} \neq 0$ ) em algum período  $t$  com folga de capacidade, procura-se eliminar esta violação fazendo transferências de produção do item  $k$

para o período  $t$ . No entanto, ao fazer estas transferências o arranjo mantém a factibilidade da solução procurando não se afastar muito do valor ótimo do problema relaxado.

A partir das quatro observações acima, foi desenvolvido em nosso trabalho um arranjo final diferente do que foi proposto no artigo, buscando satisfazer as três propriedades do teorema 1. Assim, após a aplicação dos quatro passos iniciais, os quais são semelhantes ao que foi proposto por Trigeiro *et al.* (1989), quando se obtém uma solução factível, aplica-se um arranjo final fazendo algumas transferências de modo a manter a factibilidade da solução, procurando afastar o mínimo possível do valor ótimo da função objetivo do problema relaxado e, ao invés de buscar a propriedade  $I_{i,t-1}X_{it}=0$ , como faz Trigeiro *et al.* (1989), busca-se satisfazer a condição de folgas complementares, a qual é uma propriedade de otimalidade para o problema com restrição de capacidade.

### 3.6.1 Descrição da Nova Proposta de “Arranjo Final”

A partir de uma solução infactível (solução ótima do problema relaxado), tenta-se factibilizar a solução, de forma que o valor da função objetivo Lagrangiana, não se afaste muito de seu valor ótimo. A factibilização da solução é feita utilizando os quatro passos propostos por Trigeiro *et al.* (1989). Dado que uma solução factível foi obtida por estes quatro passos, propõe-se um arranjo final com o objetivo de melhorar esta solução factível.

O procedimento consiste de dois passos: um passo regressivo no tempo e outro progressivo no tempo.

- **Passo regressivo no tempo:**

Partindo de uma solução factível, inicia-se no fim do horizonte de planejamento (período  $T$ ) e evolui em direção ao período inicial. Se num determinado período  $t$ , existir folga de capacidade ( $(\sum_i b_i X_{it} + \sum_i s_i Y_{it} - CAP_t) < 0$ ) e, o valor do multiplicador de Lagrange para este período for maior que zero ( $\lambda_t > 0$ ), este período não estará satisfazendo as condições de folgas complementares ( $\lambda_t(CAP_t - \sum_i b_i X_{it} + \sum_i s_i Y_{it}) = 0$ ). Diante disso, deve-se transferir produção para este período  $t$  de modo que a folga de capacidade seja eliminada, ou seja, ( $(\sum_i b_i X_{it} + \sum_i s_i Y_{it} - CAP_t) = 0$ ). Com isso, busca-se a propriedade (iii) do teorema 1.

Para transferir produção para este período  $t$ , inicialmente procura-se um período  $t'$  anterior a  $t$  ( $t' < t$ ), para o qual o vetor multiplicador de Lagrange é zero ( $\lambda_{t'} = 0$ ). Encontrado tal período, verifica-se todos os itens que estão sendo produzidos, para avaliar qual o item de menor custo para ser transferido. Os custos envolvidos são: custos de produção, preparação, estoque e os custos Lagrangianos. Escolhido o item  $k$  de menor custo, a produção (ou parte da produção) deste item somente será transferida para o período  $t$ , se o valor da função objetivo após a sua transferência, for menor que o valor da função objetivo antes da transferência. Assim, ao escolher o item de menor custo e só fazer sua transferência se a função objetivo for melhorada, tenta-se aproximar-se do valor ótimo da função objetivo Lagrangiana, ou seja, busca-se a propriedade (i) do teorema 1.

Quando um item  $k$  é escolhido para ser transferido do período  $t'$  para o período  $t$ , a quantidade deste item a ser transferida será o mínimo entre:

- a quantidade produzida do item  $k$  no período  $t'$ ;
- a menor quantidade de estoque do item  $k$  para todos os períodos desde  $t'$  até  $t-1$ ;
- a folga de capacidade do período  $t$ , menos o tempo gasto com *setup* do item  $k$  (se for preciso um novo *setup* após a transferência) dividido pelo tempo unitário de produção do item  $k$ .

Ou seja, a quantidade a ser transferida será:

$$\delta = \min \{ X_{kt'}; I_{kh}, h=t', \dots, t-1; \text{Folga}(t)/b_k \}$$

$$\text{onde: Folga}(t) = \begin{cases} \text{CAP}_t - \sum_i b_i X_{it} - \sum_i s_i Y_{it} & \text{se } Y_{kt} = 1 \\ \text{CAP}_t - \sum_i b_i X_{it} - \sum_i s_i Y_{it} - s_k & \text{se } Y_{kt} = 0 \end{cases}$$

Observe que, toda esta preocupação com a quantidade a ser transferida se dá exatamente para manter a factibilidade da solução. Com isso, busca-se satisfazer a propriedade (ii) do teorema 1.

Se a transferência de um item não for suficiente para eliminar a folga de capacidade do período  $t$ , um outro item é escolhido, determina-se a quantidade deste item que deverá ser transferida e transfere-se novamente. Isto é feito até que não haja mais folga no período  $t$ , ou que

seja atingido um número máximo de três iterações (este valor foi obtido após extensivos testes computacionais). Quando a folga de capacidade do período  $t$  é eliminada, o arranjo passa a examinar o período  $t-1$  e o processo se repete.

- **Passo progressivo no tempo:**

A idéia do passo progressivo é semelhante à do passo regressivo, ou seja:

Partindo da solução obtida após o passo regressivo do arranjo final, inicia-se no começo do horizonte de planejamento (período 1) e evolui em direção ao período final. Se num determinado período  $t$ , existir folga de capacidade ( $(\sum_i b_i X_{it} + \sum_i s_i Y_{it} - CAP_t) < 0$ ) e, o valor do multiplicador de Lagrange para este período for maior que zero ( $\lambda_t > 0$ ), este período não estará satisfazendo as folgas complementares ( $\lambda_t (CAP_t - \sum_i b_i X_{it} + \sum_i s_i Y_{it}) = 0$ ). Diante disso, deve-se transferir produção para este período para que não haja mais folga de capacidade ( $(\sum_i b_i X_{it} + \sum_i s_i Y_{it} - CAP_t) = 0$ ). Com isso, busca-se a propriedade (iii) do teorema 1.

Para transferir produção para este período  $t$ , inicialmente procura-se um período  $t'$  posterior a  $t$  ( $t' > t$ ), para o qual o vetor multiplicador de Lagrange é zero ( $\lambda_{t'} = 0$ ). Encontrado tal período, verifica-se todos os itens que estão sendo produzidos, para avaliar qual o item de menor custo para ser transferido. Os custos envolvidos são: custos de produção, preparação, estoque e os custos Lagrangianos. Escolhido o item  $k$  de menor custo, a produção (ou parte da produção) deste item só será transferida para o período  $t$ , se o valor da função objetivo após a sua transferência, for menor que o valor da função objetivo antes da transferência. Assim, ao escolher o item de menor custo e só fazer sua transferência se a função objetivo for melhorada, tenta-se aproximar-se do valor ótimo da função objetivo Lagrangiana, ou seja, busca-se a propriedade (i) do teorema 1.

Quando um item  $k$  é escolhido para ser transferido do período  $t'$  para o período  $t$ , a quantidade deste item a ser transferida será o mínimo entre:

- a quantidade produzida do item  $k$  no período  $t'$ ;
- a folga de capacidade do período  $t$ , menos o tempo gasto com *setup* do item  $k$  (se for preciso um novo *setup* após a transferência) dividido pelo tempo unitário de produção do item  $k$ .

Ou seja, a quantidade a ser transferida será:

$$\delta = \min\{X_{kt}; \text{Folga}(t)/b_k\} \quad \text{onde: } \text{Folga}(t) = \begin{cases} \text{CAP}_t - \sum_i b_i X_{it} - \sum_i s_i Y_{it} & \text{se } Y_{kt} = 1 \\ \text{CAP}_t - \sum_i b_i X_{it} - \sum_i s_i Y_{it} - s_k & \text{se } Y_{kt} = 0 \end{cases}$$

Observe que, toda esta preocupação com a quantidade a ser transferida se dá exatamente para manter a factibilidade da solução. Com isso, busca-se satisfazer a propriedade (ii) do teorema 1.

Caso a transferência de um item não seja suficiente para eliminar a folga de capacidade do período  $t$ , um outro item é escolhido, determina-se a quantidade deste item que deverá ser transferida e transfere-se novamente. Isto é feito até que não haja mais folga no período  $t$ , ou que seja atingido um número máximo de três iterações (este valor foi obtido após extensivos testes computacionais) . Quando a folga de capacidade do período  $t$  é eliminada, o arranjo passa a examinar o período  $t+1$  e o processo se repete.

### 3.7 Resultados Computacionais

Esta seção será subdividida em três subseções. Na primeira, descreve-se os parâmetros utilizados para a geração de dados. Na segunda, comenta-se os resultados computacionais obtidos após a implementação do método de Trigeiro *et al.* (1989) para custos variáveis no tempo. Por fim, na terceira subseção, tem-se alguns gráficos e tabelas mostrando os resultados obtidos da comparação entre o arranjo final proposto por Trigeiro *et al.* (1989) e a nossa proposta de arranjo final (arranjo final modificado).

#### 3.7.1 Geração de dados

Todos os dados foram gerados aleatoriamente segundo uma distribuição de probabilidade uniforme. Os intervalos utilizados para a geração dos dados são descritos na tabela 3.1.

Parâmetro	Variações	Observação	Sigla
Custo unitário de produção ( $c_{it}$ )	0	Fixo	F
	U[10,30]	Variável	V
Custo de preparação ( $S_{it}$ )	U[100,500]	Baixo	CB
	U[200,1000]	Alto	CA
Custo de estocagem	U[1,5]	-	-
Tempo unitário para produção ( $b_i$ )	1	-	-
Tempo de preparação ( $s_i$ )	U[10,50]	Baixo	TB
	U[30,150]	Alto	TA
Demanda ( $d_{it}$ )	U[0,180]	25% das demandas dos 4 primeiros períodos são fixadas em zero	-
Capacidade ( $CAP_t$ )	$CAP_t/0.80$	Folgada	$C_1$
	$CAP_t$	Normal	$C_2$

Tabela 3.1: Intervalos para geração dos dados.

A maioria dos intervalos utilizados para geração dos dados foram obtidos com base no artigo de Trigeiro *et al.* (1989), no entanto, por diversos motivos alguns intervalos não são iguais aos deste artigo. A seguir, serão feitos alguns comentários com respeito a geração dos dados:

- além do custo unitário de produção fixo em zero, foi considerado um custo unitário de produção variável no intervalo [10,30]. Este intervalo de variação foi determinado com base em nossos testes computacionais. Entretanto, os testes feitos com este intervalo não têm a intenção de simular exemplos práticos, mas somente obter resultados que comprovam o que havia sido exposto teoricamente a respeito da influência, nas duas versões de arranjos finais, quando se considera custos de produção variáveis no tempo;

- não foi possível entender a maneira exata como Trigeiro *et al.* (1989) geraram os custos de preparação e estocagem, por isso foram considerados os intervalos [200,1000] e [1,5] respectivamente. Ao nosso entendimento, estes são os intervalos que se aproximam mais daqueles utilizados por Trigeiro *et al.* (1989). Além disso, foi utilizado o intervalo [100,500] para gerar exemplos com baixo custo de preparação;

- Trigeiro *et al.* (1989) consideram três intervalos diferentes para a geração da demanda. No entanto, neste trabalho o intervalo de variação da demanda, foi fixado em [0,180] com base em Berretta (1997). Optou-se por utilizar apenas um intervalo para geração da demanda, por

verificar que variações deste intervalo não influenciaram muito em nossos resultados computacionais;

- o tempo de preparação foi gerado no intervalo [10,50] e [30,150] para caracterizar exemplos com baixo e alto tempo de preparação respectivamente. Trigeiro *et al.* (1989) utilizam estes intervalos para gerar exemplos com alta variabilidade de tempo de preparação;

- a quantidade de itens (N) e o número de períodos (T) são dados na tabela 3.2;

- a capacidade foi gerada segundo uma média da política Lote-por-Lote (seção 2.2), isto é, para cada período t, calcula-se a quantidade de recursos necessária para produzir exatamente as demandas dos itens neste período. Obviamente, esse cálculo é feito somente para os itens que tem demanda positiva no período t. Soma-se a quantidade de recursos necessária para todos os períodos e divide-se pelo número de períodos (T), ou seja:

$$CAP_t = \frac{\sum_{t=1}^T [\sum_{i=1}^N (b_i d_{it} + s_i)]}{T}$$

Para realizar os testes computacionais, foram utilizados dois níveis de capacidade diferentes:

C<sub>1</sub>: CAP<sub>t</sub>/0.85 considerada folgada;

C<sub>2</sub>: CAP<sub>t</sub> considerada normal.

Trigeiro *et al.* (1989) consideram três níveis de capacidade: folgada (CAP<sub>t</sub>/0.75), normal (CAP<sub>t</sub>/1) e apertada (CAP<sub>t</sub>/1.10). No entanto, os testes computacionais mostraram que, para o nível de capacidade (CAP<sub>t</sub>/0.75) muitos exemplos foram resolvidos pelo método de Wagner-Whitin e não utilizaram a heurística de factibilização e, para o nível (CAP<sub>t</sub>/1.10) muitos exemplos foram infactíveis. Assim, utilizou-se os níveis de capacidade C<sub>1</sub> e C<sub>2</sub> descritos acima pois, além de conseguir obter, com mais facilidade, exemplos resolvidos pela heurística de factibilização, foi mais clara a análise das duas propostas de arranjos finais.

### 3.7.2 Resultados Computacionais para o Método de Trigeiro *et al.* (1989) com Custos Variáveis no Tempo

Segundo Trigeiro *et al.* (1989), na implementação do método, todos os custos foram considerados constantes no tempo. No entanto, o modelo (1.12)-(1.17) proposto por Trigeiro *et al.* (1989) considera todos os custos variáveis no tempo. Diante disso, neste trabalho, o método foi implementado para custos variáveis no tempo. A implementação foi feita em linguagem C e

os testes computacionais foram realizados em um micro computador Pentium II, 300 Mhz, 132 MB. Os resultados obtidos considerando custos variáveis no tempo foram, em geral, um pouco piores do que os obtidos por Trigeiro *et al.* (1989), entretanto, as conclusões com respeito a variação dos parâmetros foram as mesmas e, serão descritas a seguir:

- quanto maior o número de itens e períodos, melhor é a qualidade da solução, sendo que, a variação da quantidade de itens tem maior influência do que a variação do número de períodos. Como já foi exposto na seção 3.2, a qualidade da solução é avaliada através do *gap*, ou seja, quanto menor o *gap* melhor é a qualidade da solução. Assim, exemplos grandes tendem a dar um *gap* menor. Este é um resultado bastante importante pois, em muitos casos testa-se um determinado método de resolução para exemplos pequenos e, se estes resultados forem ruins, conclui-se erroneamente que os resultados serão ainda piores para exemplos grandes, podendo gerar uma falsa avaliação da qualidade do método;
- a variação da capacidade tem um grande efeito sobre a qualidade da solução. Exemplos com capacidade normal são mais difíceis de resolver, isto é, tendem a dar um *gap* maior que exemplos com capacidade folgada;
- exemplos com alto tempo de preparação são mais fáceis de resolver, isto é, geram *gaps* menores do que exemplos com baixo tempo de preparação. Isto acontece porque o tempo de preparação é incluído na geração da capacidade (subseção 3.7.1), sendo assim, altos tempos de preparação geram capacidades mais folgadas. Entretanto, este resultado está ligado à forma de geração dos dados. Talvez em problemas reais, o alto tempo de preparação dificulte a resolução;
- o custo de preparação tem um efeito bastante sutil no *gap*, em geral, quanto mais alto for o custo de preparação, maior será o *gap*. A explicação para este fato é bastante intuitiva. Exemplos com baixo custo de preparação, tendem a ter uma melhor distribuição da produção entre os períodos, facilitando a resolução em termos de violação da capacidade e conseqüentemente, gerando *gaps* menores do que exemplos com alto custo de preparação;
- a variação da demanda e do tempo unitário de produção têm pouco efeito na qualidade da solução.

Como foi observado anteriormente, os resultados obtidos pela nossa implementação do método de Trigeiro *et al.* (1989), foram piores do que os obtidos por Trigeiro *et al.* (1989). Este fato pode ter ocorrido por diversos motivos tais como:



- o fato de que em nossa implementação, os custos foram considerados variáveis no tempo, ao passo que, Trigeiro *et al.* (1989) implementaram para custos constantes no tempo;
- os intervalos de geração dos dados que, embora sejam parecidos com os de Trigeiro *et al.* (1989), têm algumas diferenças;
- Trigeiro *et al.* (1989) não descrevem exatamente a maneira como eles utilizam o método de otimização do subgradiente. Devido a este motivo, podem existir algumas diferenças entre limitantes inferiores gerados, ocasionando uma diferença nos resultados finais (*gap*). Neste trabalho foi utilizada a proposta C contida no artigo de Camerini *et al.* (1975) com  $\gamma=1.5$ .

### 3.7.3 Comparação Entre as Duas Propostas de Arranjo Final

Após implementar o método de Trigeiro *et al.* (1989) considerando custos variáveis no tempo, foi implementado o arranjo final modificado para que fosse adaptado ao método e pudesse ser feita uma comparação com o arranjo final original. Com isso, foi possível verificar qual arranjo final obtinha melhores resultados para cada combinação de parâmetros. Os resultados desta comparação serão descritos a seguir.

De acordo com a subseção (3.7.2), os parâmetros que têm maior efeito sobre a qualidade da solução são: o número de itens e períodos, a capacidade, o custo de preparação e o tempo de preparação. Por este motivo, neste trabalho optou-se por variar apenas estes parâmetros além do custo unitário de produção que será considerado fixo ou variável (tabela 3.1). Assim, foram realizados testes computacionais considerando todas as possíveis combinações entre cada um destes parâmetros. A tabela 3.2 a seguir, mostra a quantidade total de exemplos gerados através da combinação destes parâmetros. As siglas utilizadas na tabela 3.2 são dadas na tabela 3.1.

Número de itens (N)	6, 12, 24
Número de períodos (T)	15, 30
Custo unitário de produção ( $c_{it}$ )	F e V
Custo de preparação ( $S_{it}$ )	CB e CA
Tempo de preparação	TB e TA
Capacidade	$C_1, C_2$
Número de exemplos (sementes)	10
Total de exemplos gerados	960

Tabela 3.2: Parâmetros a serem variados.

A seguir serão dadas as tabelas 3.3 e 3.4 que mostram os *gaps* obtidos pelas várias combinações de parâmetros. As linhas destas tabelas representam o tamanho dos exemplos e as colunas representam as várias combinações de parâmetros. Para representar cada combinação são utilizadas as siglas contidas na tabela 3.1 e, a representação é feita na seguinte ordem:

**custo unitário de produção / custo de preparação / tempo de preparação / capacidade**

Assim, as siglas F/CB/TB/C<sub>1</sub> representam exemplos com: custo unitário de produção fixo, custo de preparação baixo, tempo de preparação baixo e capacidade folgada.

Tem-se ainda nas tabelas 3.3 e 3.4, o tempo médio para cada exemplo, considerando as várias combinações de parâmetros (colunas) e os vários tamanhos (linhas). Como pode-se observar, o tempo médio para se resolver um exemplo é bastante baixo, por isso, neste trabalho, não será feita nenhuma análise do tempo computacional.

-	F/CB/TB/C <sub>1</sub>			F/CB/TB/C <sub>2</sub>			F/CB/TA/C <sub>1</sub>			F/CB/TA/C <sub>2</sub>			tempo (s)*
	P*	A1*	A2*	P	A1	A2	P	A1	A2	P	A1	A2	
<b>6 x 15</b>	7,44	7,14	6,8	19,77	19,27	19,18	2,09	2,02	2,09	7,58	7,4	7,31	0.05
<b>12 x 15</b>	1,43	1,41	1,28	8,62	8,31	8,19	0,34	0,34	0,33	2,41	2,29	2,15	0.09
<b>24 x 15</b>	0,93	0,93	0,77	4,27	4,18	3,9	0,12	0,11	0,12	1,1	1,08	0,86	0.194
<b>6 x 30</b>	5,75	5,28	5,73	18,36	17,87	18,36	1,54	1,38	1,53	6,11	5,67	6,1	0.168
<b>12 x 30</b>	1,46	1,43	1,26	6,33	6,11	6,33	0,29	0,29	0,29	1,56	1,54	1,49	0.473
<b>24 x 30</b>	0,16	0,16	0,15	1,93	1,86	1,8	0,07	0,07	0,07	0,23	0,23	0,22	0.8
<b>tempo(s)</b>	0.148			0.114			0.086			0.145			-

Tabela 3.3: *Gaps* para várias combinações de parâmetros considerando custo unitário de produção fixo e custo de preparação baixo.

(\*)

**P:** *Gap* obtido após os 4 passos iniciais da heurística de factibilização de Trigeiro *et al.* (1989).

**A1:** *Gap* obtido após a aplicação do arranjo final de Trigeiro *et al.* (1989).

**A2:** *Gap* obtido após a aplicação da nossa proposta de arranjo final.

**Tempo (s):** Tempo médio (em segundos) para resolver um exemplo.

-	F/CA/TB/C <sub>1</sub>			F/CA/TB/C <sub>2</sub>			F/CA/TA/C <sub>1</sub>			F/CA/TA/C <sub>2</sub>			tempo (s)
	N x T	P	A1	A2	P	A1	A2	P	A1	A2	P	A1	
6 x 15	9,02	8,44	8,92	16,47	15,55	16,46	2,59	2,38	2,59	7,09	6,42	7,07	0.046
12 x 15	2,8	2,72	2,63	8,86	8,38	8,71	0,97	0,96	0,97	2,85	2,76	2,8	0.081
24 x 15	0,84	0,82	0,8	4,73	4,56	4,61	0,15	0,15	0,15	0,88	0,85	0,78	0.128
6 x 30	7,1	6,58	6,88	19,26	17,92	19,24	2,21	2,06	2,09	6,31	5,75	6,04	0.157
12 x 30	1,74	1,56	1,7	7,27	6,83	7,27	0,33	0,33	0,33	1,25	1,15	1,23	0.337
24 x 30	0,52	0,51	0,51	2,64	2,44	2,64	0,09	0,09	0,09	0,38	0,38	0,38	0.547
tempo(s)	0.102			0.102			0.061			0.105			-

Tabela 3.4: *Gaps* para várias combinações de parâmetros considerando custo unitário de produção fixo e custo de preparação alto.

Observe que, nas tabelas 3.3 e 3.4 o custo unitário de produção foi considerado fixo. Posteriormente, serão dadas as tabelas 3.5 e 3.6 onde o custo unitário de produção será considerado variável. O gráfico 3.1, a seguir, representa o *gap* médio para cada combinação de parâmetros contida nas tabelas 3.3 e 3.4. O eixo y representa o *gap* médio entre todos os tamanhos e o eixo x representa as combinações de parâmetros. Os intervalos utilizados para geração dos dados estão descritos na tabela 3.1.

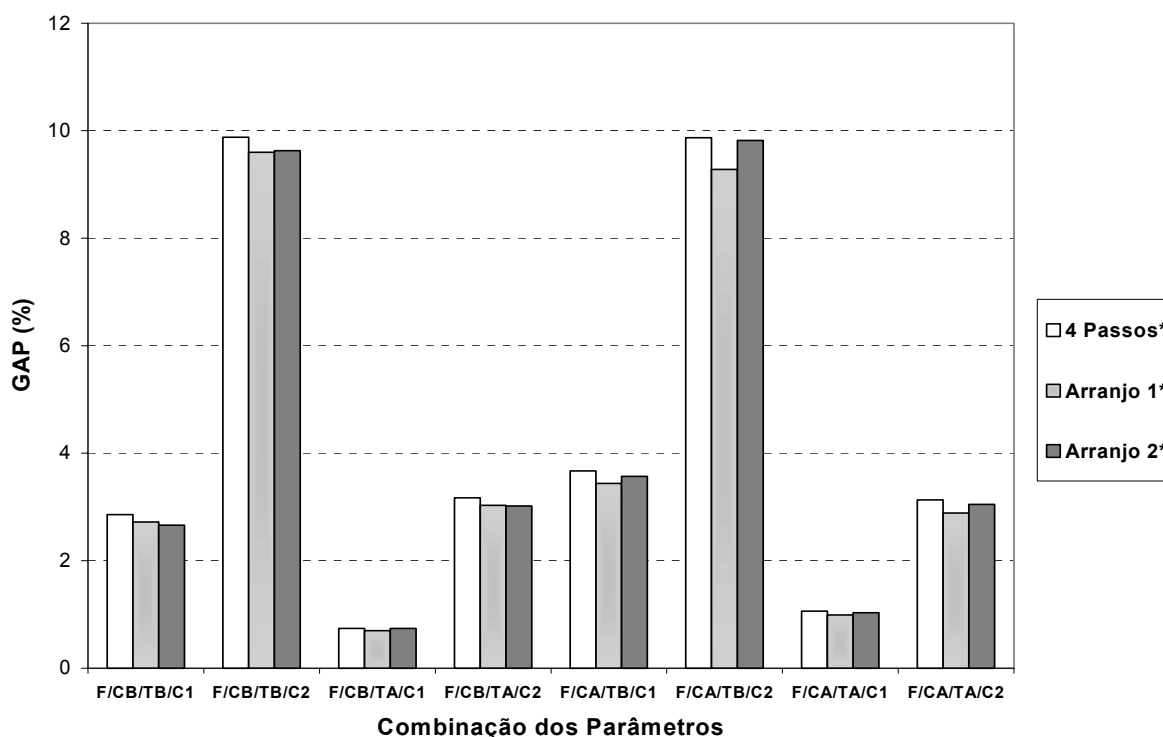


Gráfico 3.1: *Gap* médio entre todos os tamanhos para as possíveis combinações de parâmetros, considerando custos unitários de produção fixos em zero.

(\*)

**4 Passos:** *Gap* obtido após os 4 passos iniciais da heurística de factibilização.

**Arranjo 1:** *Gap* obtido após a aplicação do arranjo final de Trigeiro *et al.* (1989);

**Arranjo 2:** *Gap* obtido após a aplicação da nossa proposta de arranjo final;

A seguir, tem-se alguns gráficos (gráfico 3.2 até gráfico 3.6) que representam os dados das tabelas 3.3 e 3.4 de uma forma diferente da que foi representada no gráfico 3.1. O eixo x representa o tamanho de cada problema. O eixo y representa o *gap* médio entre os 10 exemplos gerados para o tamanho dado no eixo x e para a combinação de parâmetros que está sendo considerada.

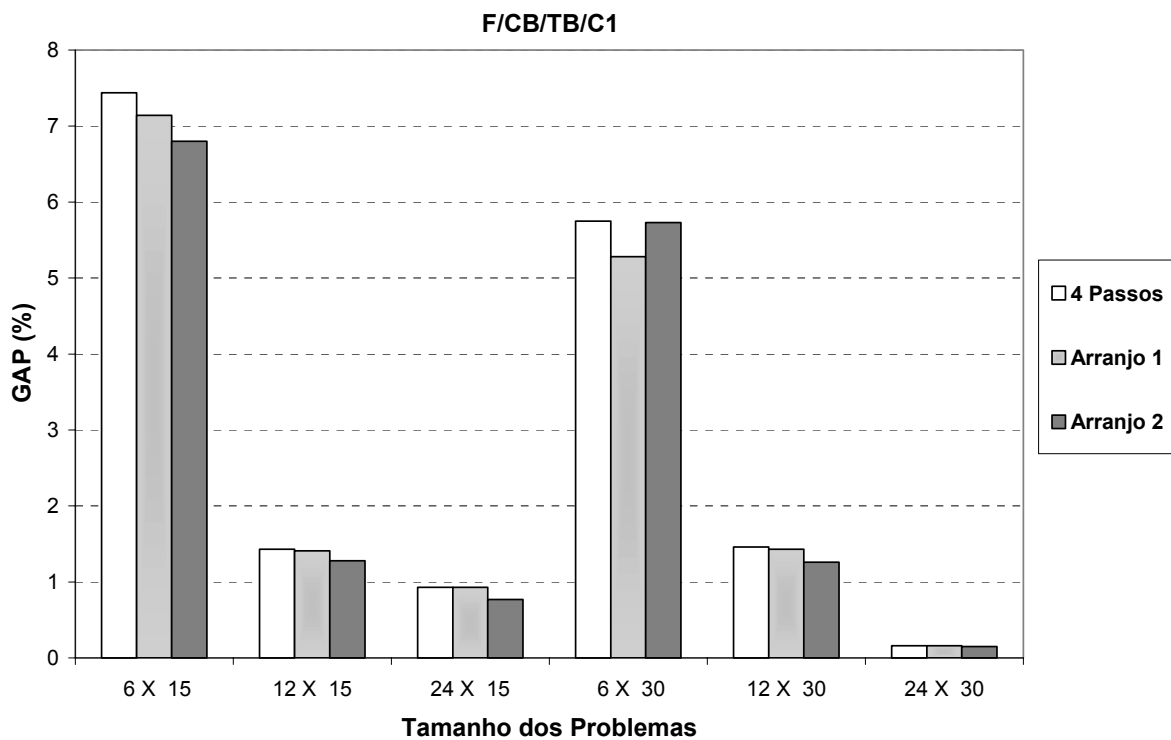


Gráfico 3.2: *Gap* médio para cada tamanho, considerando custo unitário de produção fixo, custo de preparação baixo, tempo de preparação baixo e capacidade folgada.

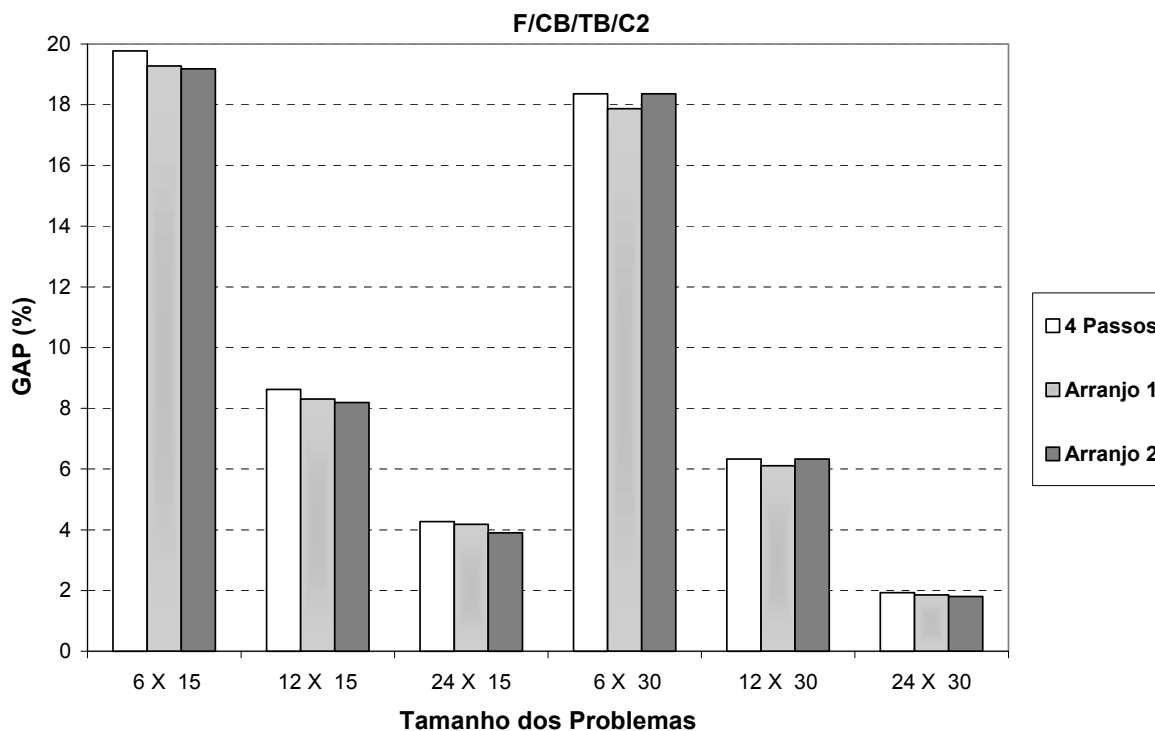


Gráfico 3.3: *Gap* médio para cada tamanho, considerando custo unitário de produção fixo, custo de preparação baixo, tempo de preparação baixo e capacidade normal.

Nos gráficos 3.2 e 3.3 é possível observar o que já havia sido antecipado com respeito ao tamanho dos problemas, ou seja, quanto maior a quantidade de itens e períodos, menor será o *gap*.

Pode-se verificar também que, em relação a comparação entre os dois arranjos finais, a nossa proposta (Arranjo 2) obtém melhores resultados quando o número de itens é acrescido e, a proposta de Trigeiro *et al.* (1989) (Arranjo 1) obtém melhores resultados quando o número de períodos é acrescido. Além disso, pode-se observar que no gráfico 3.2 onde a capacidade é folgada, os *gaps* são bem menores do que os do gráfico 3.3 onde a capacidade é normal.

Nos gráficos 3.4 e 3.5 a seguir, considera-se altos tempos de preparação obtendo-se *gaps* bem menores do que os obtidos pelos exemplos com tempo de preparação baixo (gráficos 3.2 e 3.3). No gráfico 3.4, onde a capacidade é considerada folgada os *gaps* obtidos foram muito baixos e conseqüentemente, os dois arranjos finais não obtiveram melhorias significativas na solução encontrada pelos 4 passos iniciais da heurística de factibilização.

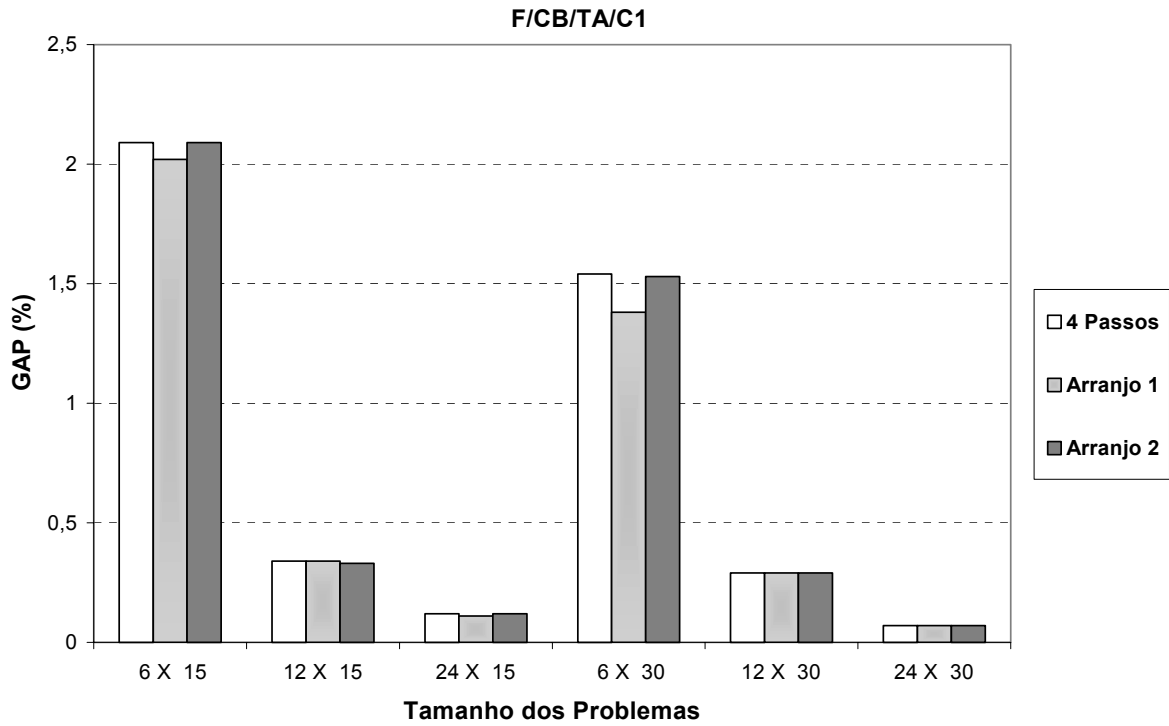


Gráfico 3.4: *Gap* médio para cada tamanho, considerando custo unitário de produção fixo, custo de preparação baixo, tempo de preparação alto e capacidade folgada.

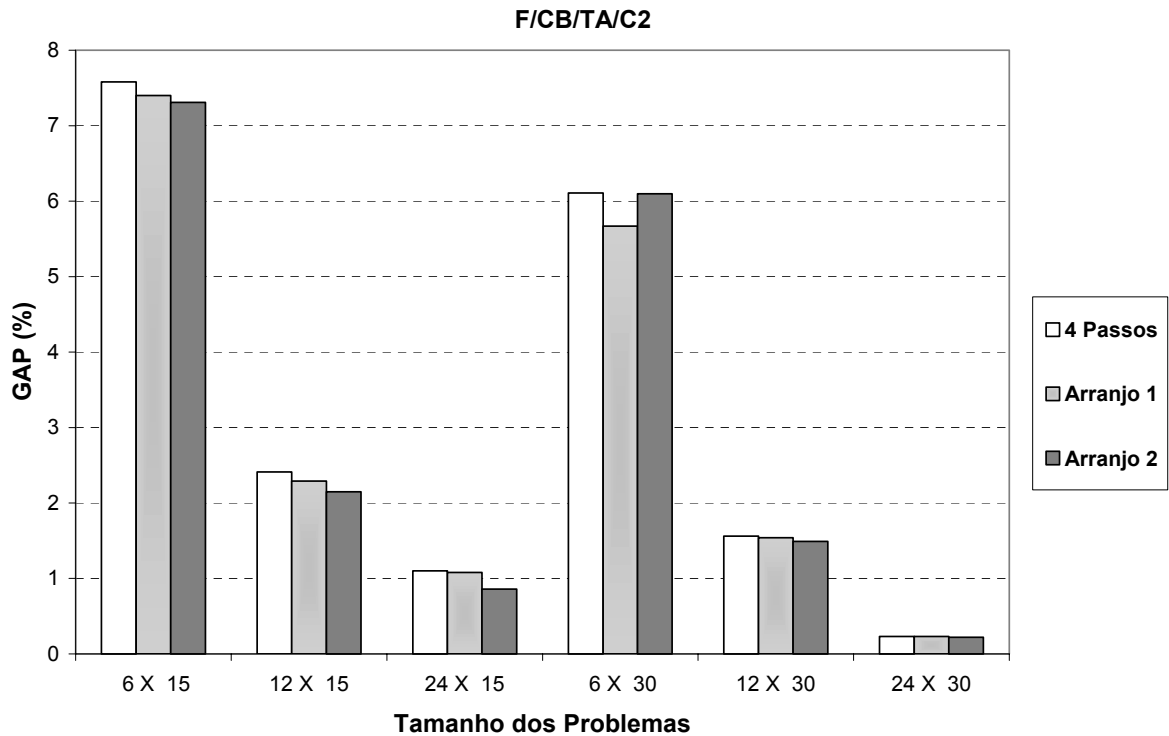


Gráfico 3.5: *Gap* médio para cada tamanho, considerando custo unitário de produção fixo, custo de preparação baixo, tempo de preparação alto e capacidade normal.

Até este momento, os gráficos apresentados (gráfico 3.2 à 3.5) representaram todos os resultados contidos na tabela 3.3. Os dados representados na tabela 3.4 são bastante semelhantes aos da tabela 3.3, com exceção dos custos de preparação que são considerados altos. No entanto, a variação do custo de preparação entre alto e baixo provoca mudanças bastante sutis no *gap*. Por este motivo, julgou-se desnecessária a apresentação dos gráficos representando todas as combinações de parâmetros contidos na tabela 3.4. Assim, apresenta-se somente o gráfico 3.6 representado apenas uma combinação de parâmetros.

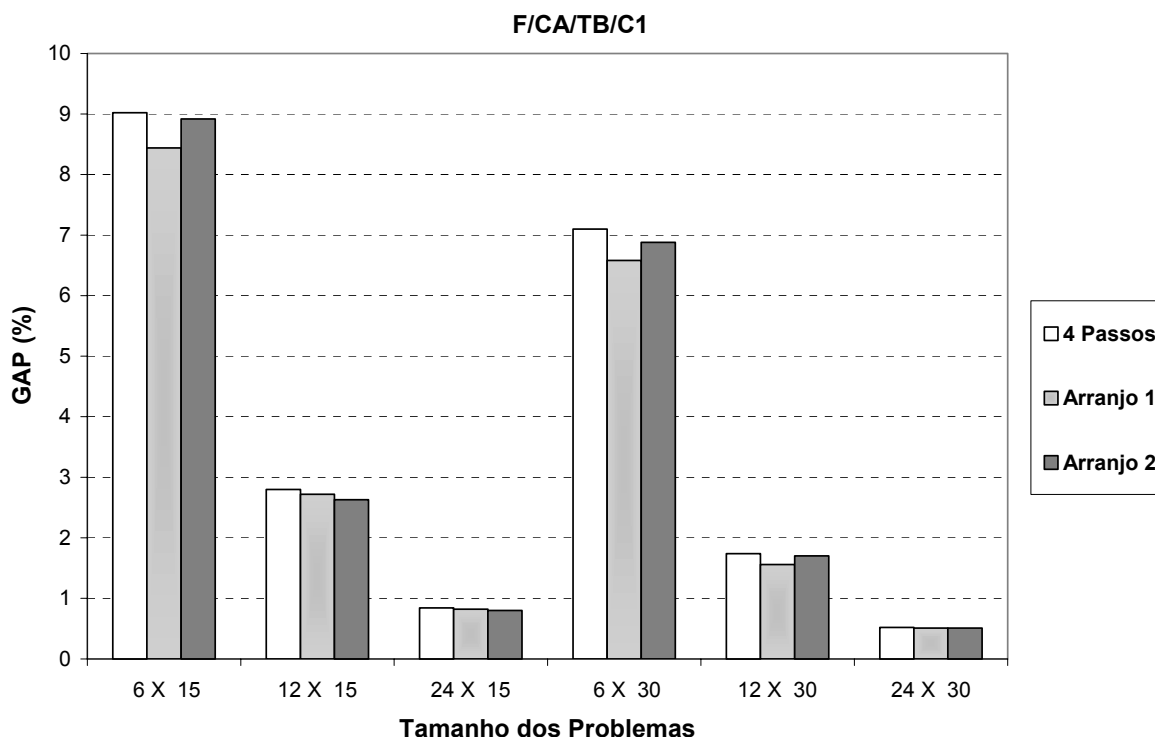


Gráfico 3.6: *Gap* médio para cada tamanho, considerando custo unitário de produção fixo, custo de preparação alto, tempo de preparação baixo e capacidade folgada.

Antes de fazer uma análise do gráfico 3.6, cabe observar que, as conclusões obtidas podem ser generalizadas para todas as combinações de parâmetros contidas na tabela 3.4. Analisando o gráfico 3.6 e comparando com o gráfico 3.2, pode-se concluir que, exemplos com alto custo de preparação geram *gaps* apenas um pouco maiores do que exemplos com baixo custo de preparação. Conclui-se também, que o desempenho da nossa proposta de arranjo final (Arranjo 2), piora bastante quando se considera altos custos de preparação.

Em todos os exemplos apresentados até este momento (tabelas 3.3 e 3.4), os custos unitários de produção foram considerados fixos. As tabelas 3.5 e 3.6, a seguir, contêm os

resultados obtidos entre todas as possíveis combinações de parâmetros considerando custos unitários de produção variáveis no tempo.

-	V/CB/TB/C <sub>1</sub>			V/CB/TB/C <sub>2</sub>			V/CB/TA/C <sub>1</sub>			V/CB/TA/C <sub>2</sub>			Tempo (s)
	N x T	P	A1	A2	P	A1	A2	P	A1	A2	P	A1	
<b>6 x 15</b>	3,84	3,82	3,36	5,08	4,96	4,82	1,25	1,24	1,11	3,37	3,28	3,21	0.045
<b>12 x 15</b>	1,32	1,31	1,15	3,43	3,29	3,24	0,32	0,31	0,29	1	0,99	0,93	0.072
<b>24 x 15</b>	0,56	0,56	0,48	1,88	1,89	1,66	0,14	0,14	0,14	0,39	0,39	0,35	0.117
<b>6 x 30</b>	4,22	4,16	3,22	7,73	7,47	7,65	1,26	1,25	1	3,18	3,12	2,72	0.163
<b>12 x 30</b>	1,02	0,99	0,81	3,01	2,97	2,96	0,09	0,09	0,07	0,54	0,54	0,48	0.226
<b>24 x 30</b>	0,32	0,32	0,27	1,5	1,47	1,28	0,09	0,09	0,09	0,25	0,25	0,23	0.421
<b>tempo(s)</b>	0.071			0.103			0.051			0.072			-

Tabela 3.5: Gaps para várias combinações de parâmetros considerando custo unitário de produção variável no tempo e custo de preparação baixo.

-	V/CA/TB/C <sub>1</sub>			V/CA/TB/C <sub>2</sub>			V/CA/TA/C <sub>1</sub>			V/CA/TA/C <sub>2</sub>			tempo (s)
	N x T	P	A1	A2	P	A1	A2	P	A1	A2	P	A1	
<b>6 x 15</b>	4,9	4,7	4,58	6,75	6,25	6,58	2,37	2,29	2	3,95	3,83	3,79	0.046
<b>12 x 15</b>	1,97	1,96	1,61	4,2	4,18	3,98	0,33	0,33	0,33	1,62	1,62	1,42	0.077
<b>24 x 15</b>	0,7	0,69	0,69	2,42	2,37	2,38	0,16	0,16	0,16	0,7	0,69	0,68	0.123
<b>6 x 30</b>	5,32	5,21	4,91	9,64	9,1	9,49	1,78	1,78	1,45	3,46	3,33	3,14	0.123
<b>12 x 30</b>	1,29	1,24	1,21	3,39	3,37	3,37	0,1	0,1	0,1	0,71	0,69	0,66	0.224
<b>24 x 30</b>	0,56	0,56	0,51	2,02	1,97	1,9	0,14	0,14	0,14	0,46	0,46	0,42	0.470
<b>tempo(s)</b>	0.075			0.092			0.053			0.084			-

Tabela 3.6: Gaps para várias combinações de parâmetros considerando custo unitário de produção variável no tempo e custo de preparação alto.

As tabelas 3.5 e 3.6 têm como finalidade principal mostrar o que vem sendo observado em vários pontos deste trabalho, ou seja, o arranjo final proposto por Trigeiro *et al.* (1989) (Arranjo 1) tem um pior desempenho, em relação ao arranjo modificado (Arranjo 2), quando se considera custos unitários de produção variáveis no tempo. Este resultado pode ser observado comparando o gráfico 3.7 (a seguir) com o gráfico 3.1.



O gráfico 3.7 representa os dados contidos nas tabelas 3.5 e 3.6. O eixo y representa o *gap* médio entre todos os tamanhos e o eixo x representa as possíveis combinações de parâmetros. Os intervalos utilizados para geração dos dados estão descritos na tabela 3.1.

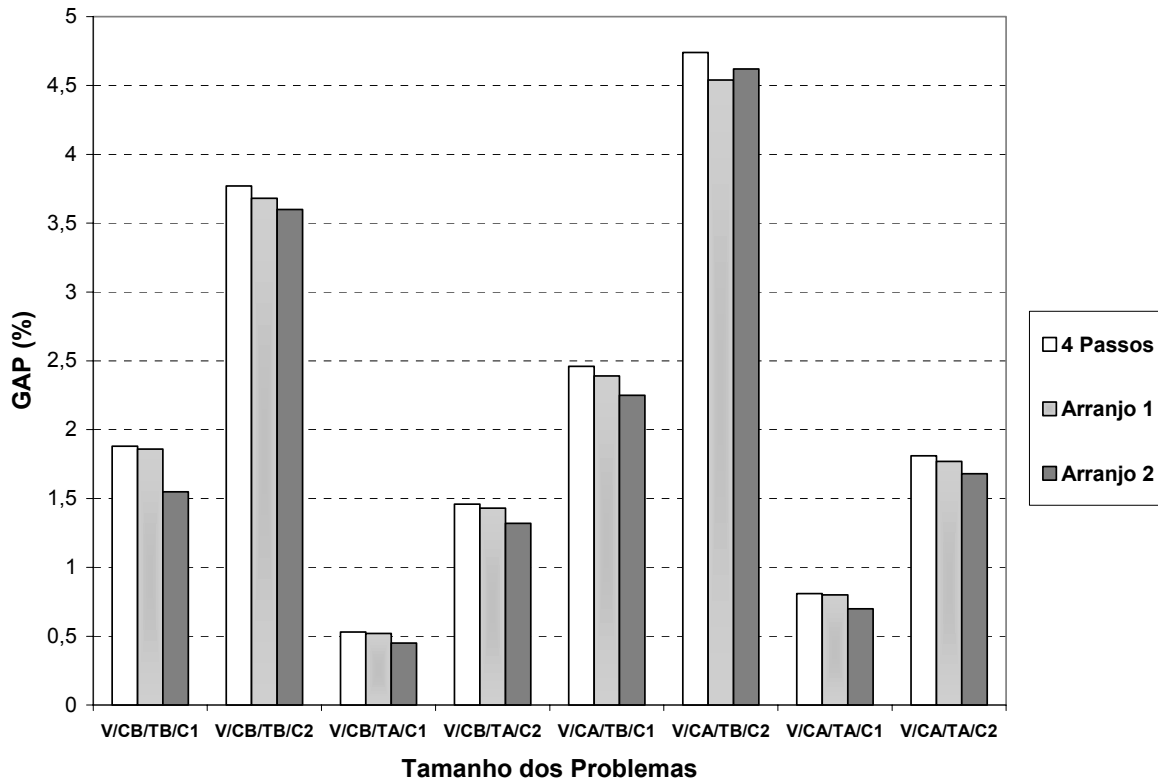


Gráfico 3.7: *Gap* médio entre todos os tamanhos para as possíveis combinações de parâmetros, considerando custos unitários de produção variáveis.

A seguir, apresenta-se dois gráficos que representam duas combinações de parâmetros diferentes contidas na tabela 3.5. Comparando o gráfico 3.8 com o 3.2 é possível observar claramente o declínio da qualidade do arranjo de Trigeiro *et al.* (1989) quando os custos unitários de produção são considerados variáveis no tempo. Além disso, no gráfico 3.9 tem-se que, para o conjunto de 10 exemplos com 24 itens e 15 períodos, em média, a solução encontrada pelo arranjo final de Trigeiro *et al.* (1989) foi pior que a solução factível encontrada pela heurística de factibilização. Os testes computacionais mostraram que este fato pode ocorrer com mais intensidade se o intervalo de variação do custo unitário de produção for maior.

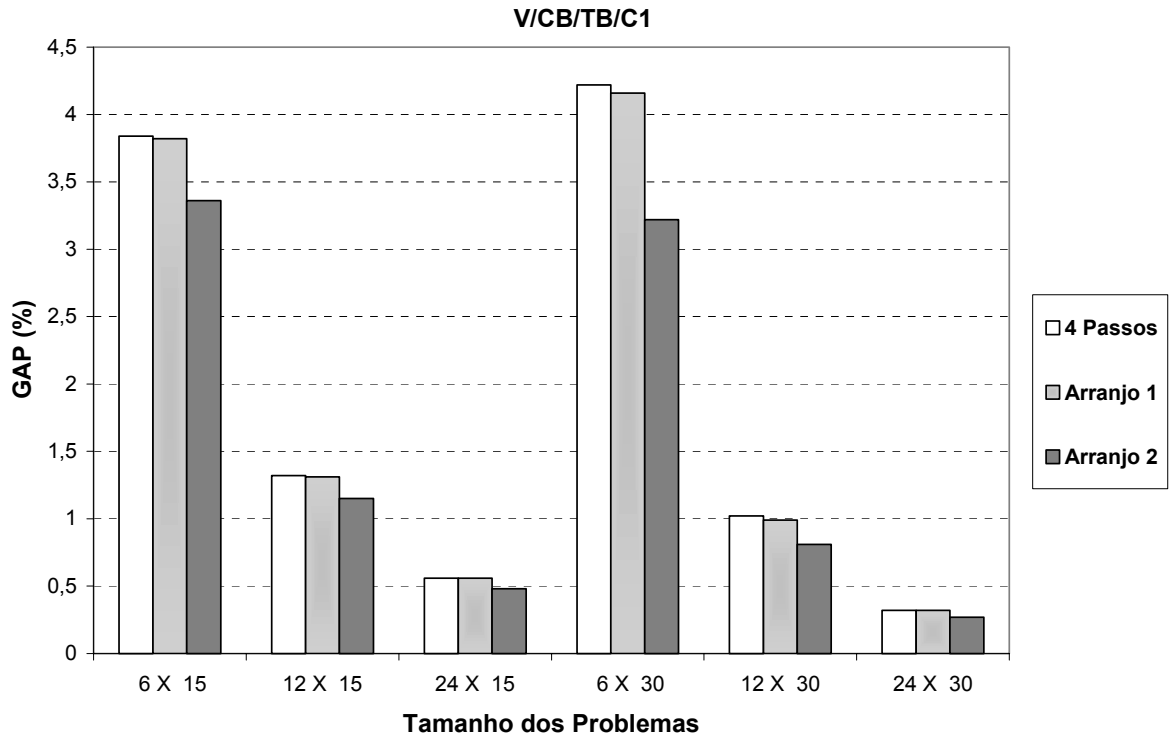


Gráfico 3.8: *Gap* médio para cada tamanho, considerando custo unitário de produção variável, custo de preparação baixo, tempo de preparação baixo e capacidade folgada.

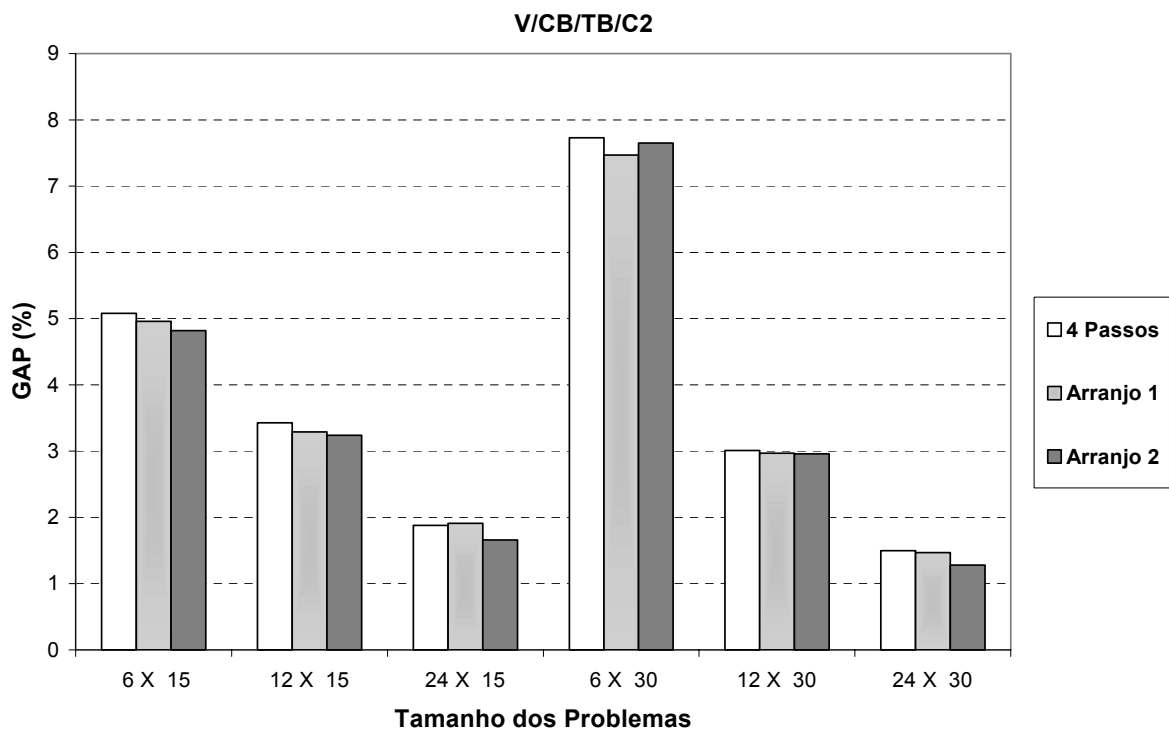


Gráfico 3.9: *Gap* médio para cada tamanho, considerando custo unitário de produção variável, custo de preparação baixo, tempo de preparação baixo e capacidade normal.

Diante dos dados apresentados anteriormente, pode-se concluir que, dependendo da combinação de parâmetros um dos arranjos finais mostrou melhor desempenho, sendo que, para exemplos que consideram custos unitários de produção variáveis no tempo, o arranjo modificado obteve seus melhores resultados.

Em geral, as melhorias obtidas pelos dois arranjos finais foram muito pequenas em termos percentuais. Entretanto, é bastante provável que este fato tenha ocorrido devido a uma grande eficiência da processo de factibilização desenvolvido por Trigeiro *et al.* (1989), e não devido a uma ineficiência dos arranjos finais.

---

---

## CAPÍTULO 4:

# Uma Abordagem Exata para o Problema de Dimensionamento de Lotes Monoestágio com Restrição de Capacidade

---

---

### 4.1 Introdução

Neste capítulo será revisado o trabalho de Diaby *et al.* (1992a), onde o modelo para o problema de dimensionamento de lotes monoestágio com restrição de capacidade é ligeiramente modificado em relação ao modelo apresentado no capítulo 3. O método de solução desenvolvido por Diaby *et al.* (1992a) consiste num método ótimo, baseado num procedimento de enumeração implícita (ver apêndice), sendo que, a relaxação Lagrangiana (ver apêndice) é usada para gerar os limitantes inferiores a cada nó e, a otimização da função dual é feita pelo método de otimização do subgradiente (ver apêndice). Este tipo de procedimento tem sido bastante utilizado atualmente.

A formulação do problema está contida no capítulo 1 e é dada pelas equações (1.18) – (1.25). Para facilitar a leitura, o modelo é aqui reproduzido:

$$\min \sum_i \sum_t H_{it} I_{it} + \sum_t c_{rt} R_t + \sum_t c_{vt} V_t + \sum_i \sum_t S_i Y_{it} \quad (1.18)$$

Sujeito a:

$$I_{it-1} - I_{it} + X_{it} \geq d_{it} \quad \forall i, t \quad (1.19)$$

$$X_{it} - m_{it} Y_{it} \leq 0 \quad \forall i, t \quad (1.20)$$

$$\sum_i (b_i X_{it} + s_i Y_{it}) - R_t - V_t \leq 0 \quad \forall t \quad (1.21)$$

$$R_t \leq w_t \quad \forall t \quad (1.22)$$

$$V_t \leq z_t \quad \forall t \quad (1.23)$$

$$Y_{it} = 0, 1 \quad \forall i, t \quad (1.24)$$

$$I_{it}, X_{it}, R_t, V_t \geq 0 \quad \forall i, t \quad (1.25)$$

## 4.2 Algoritmo geral

Nesta seção será apresentado um algoritmo geral seguido de alguns comentários e, nas próximas seções serão descritos com mais detalhes cada passo proposto no algoritmo.

Considere a seguinte notação:

$Z_{LS}$  = Valor do melhor limitante superior obtido até determinado momento;

$Z_{LR}(\lambda)$  = Valor da solução do problema Lagrangiano ( $LR(\lambda)$ ).

Passo inicial: Determine  $Z_{LS}$  inicial através de algum procedimento heurístico (em geral uma solução factível é obtida). Coloque o problema original com todas as variáveis binárias livres na lista de problemas candidatos. Atribua valores iniciais aos multiplicadores de Lagrange.

Passo 1: Escolha um dos problemas da lista (ramificação). Determine um limitante inferior  $Z_{LR}(\lambda)$  para o problema escolhido (limitação). Se a solução do problema Lagrangiano for factível para o problema original (1.18)-(1.25) e, o valor da função objetivo do problema original para esta solução for menor que  $Z_{LS}$ , atualize o limitante superior  $Z_{LS}$ .

Passo 2: Se  $Z_{LR}(\lambda) \geq Z_{LS} - \epsilon$ :

Então: Se a lista de problemas candidatos estiver vazia:

Então: Pare.

Senão: Volte ao passo 1.

Passo 3: Se for satisfeito algum critério de re-limitação:

Então: Aplique o método do subgradiente para melhorar o limitante inferior. Volte ao passo 2.

Passo 4: Faça a partição do problema e coloque seus descendentes na lista de problemas candidatos. Vá para o passo 1.

No passo inicial, um conjunto de diferentes heurísticas é utilizado para tentar gerar uma solução factível inicial. Caso nenhuma das heurísticas consiga encontrar uma solução factível, toma-se como limitante superior, um valor no qual nenhuma solução factível do problema pode exceder.

Para determinar qual problema da lista deve ser resolvido, Diaby *et al.* (1992a) desenvolveram várias estratégias de ramificação descritas na seção (4.6) deste capítulo. Os limitantes inferiores são gerados por relaxação Lagrangiana das restrições de demanda (1.19) ou das restrições de capacidade (1.21).

A estratégia de re-limitação (Passo 3) consiste em tentar melhorar o limitante inferior, utilizando o método de otimização do subgradiente. No entanto, se após um número predeterminado de iterações consecutivas, o método do subgradiente não conseguir melhorar o limitante inferior, o procedimento é abandonado. Cabe ainda observar que, a estratégia de re-limitação é aplicada somente quando for satisfeito um critério preestabelecido.

Nas próximas seções deste capítulo, os passos do algoritmo geral são detalhados para o modelo (1.18)-(1.25).

### 4.3 Geração do Limitante Superior Inicial

A geração de um bom limitante superior inicial é muito importante para um bom desempenho do método de enumeração implícita. Por isso, em geral, um conjunto de diferentes heurísticas é considerado para obter um limitante superior de boa qualidade e que seja uma solução factível para o problema original (1.18)-(1.25). Diaby *et al.* (1992a) reportam que, para o modelo (1.18)-(1.25), uma heurística Lagrangiana baseada no trabalho de Thizy e Van Wassenhove (1985) foi a que apresentou melhores resultados.

Esta heurística consiste em fixar as variáveis de preparação ( $Y_{it}$ ) obtidas pela solução do problema Lagrangiano. Assim, fixando-se as variáveis de preparação, é possível reformular o problema original (1.18)-(1.25), através de uma mudança de variável, como um problema de transporte (ver subseção 4.4.3). Se a solução do problema de transporte for factível, determina-se também uma solução factível para o problema original (Diaby *et al.*, 1992b). Com isso, obtém-se um limitante superior inicial para o problema (1.18)-(1.25).

Uma outra heurística proposta por Diaby *et al.* (1992a) consiste num procedimento iterativo baseado na relaxação do problema (1.18)-(1.25) por programação linear. Relaxa-se o problema colocando-se  $Y_{it} = X_{it}/m_{it}$ . Substituindo este valor na função objetivo (1.18) e nas restrições (1.21) e, eliminando as restrições (1.20), pode-se reformular o problema, através de uma mudança de variável, como um problema de transporte generalizado, o qual pode ser resolvido eficientemente, obtendo-se assim uma solução que pode ser factível para o problema

original (1.18)-(1.25). Neste caso, obtém-se também um limitante superior inicial para o problema (1.18)-(1.25).

Assim, dado o problema original (1.18)-(1.25), relaxa-se a condição de integralidade pondo-se  $Y_{it} = X_{it}/m_{it}$  obtendo-se o seguinte problema relaxado:

*Relaxação por programação linear*

$$\min \sum_i \sum_t H_{it} I_{it} + \sum_t c_{rt} R_t + \sum_t c_{vt} V_t + \sum_i \sum_t \frac{S_i X_{it}}{m_{it}} \quad (4.1)$$

Sujeito a:

$$I_{it-1} - I_{it} + X_{it} \geq d_{it} \quad \forall i, t \quad (4.2)$$

$$\sum_i (b_i X_{it} + s_i X_{it}/m_{it}) - R_t - V_t \leq 0 \quad \forall t \quad (4.3)$$

$$R_t \leq w_t \quad \forall t \quad (4.4)$$

$$V_t \leq z_t \quad \forall t \quad (4.5)$$

$$0 \leq Y_{it} \leq 1 \quad \forall i, t \quad (4.6)$$

$$I_{it}, X_{it}, R_t, V_t \geq 0 \quad \forall i, t \quad (4.7)$$

Considere as seguintes mudanças de variáveis:

$$X_{it} = \sum_{k \geq t} (L_{itk} + Z_{itk})/b_i \quad (4.8)$$

$$R_t = \sum_i \sum_{k \geq t} L_{itk} \quad (4.9)$$

$$V_t = \sum_i \sum_{k \geq t} Z_{itk} \quad (4.10)$$

$$H_{it} = \sum_{k > t} \sum_{j \leq t} (L_{ijk} + Z_{ijk})/b_i \quad (4.11)$$

Onde  $L_{itk}$  e  $Z_{itk}$  denotam a quantidade de hora regular e hora extra (respectivamente), utilizada para a produção do item  $i$  no período  $t$  para satisfazer parte ou toda a demanda do item  $i$  no período  $k$ .

Substituindo estas novas variáveis no problema relaxado (4.1)-(4.7), chega-se ao seguinte problema de transporte generalizado:

*Problema de Transporte Generalizado (PTG)*

$$\min \sum_i \sum_t \sum_{k>t} (\pi_{itk} L_{itk}) + \sum_i \sum_t \sum_{k>t} (\delta_{itk} L_{itk}) \quad (4.12)$$

sujeito a:

$$\sum_i \sum_{k \geq t} (\sigma_{it} L_{itk}) \leq w_t, \quad \forall t \quad (4.13)$$

$$\sum_i \sum_{k \geq t} (\sigma_{it} Z_{itk}) \leq z_t, \quad \forall t \quad (4.14)$$

$$\sum_{t \leq k} (L_{ijk} + Z_{ijk}) = b_i d_{ik} \quad \forall i, k \quad (4.15)$$

$$L_{itk}, Z_{itk} \geq 0 \quad \forall i, t, k \quad (4.16)$$

onde:

$$\sigma_{it} = 1/b_i + s_i/b_i m_{it},$$

$$\pi_{itk} = \begin{cases} c_{rt} + c_{si} / b_i m_{it} & \text{se } k = t \\ c_{rt} + c_{si} / b_i m_{it} + (\sum_{j=t}^{k-1} h_{ij}) / b_i & \text{se } k > t \end{cases}$$

$$\delta_{itk} = \begin{cases} c_{vt} + c_{si} / b_i m_{it} & \text{se } k = t \\ c_{vt} + c_{si} / b_i m_{it} + (\sum_{j=t}^{k-1} h_{ij}) / b_i & \text{se } k > t \end{cases}$$

Resolvendo o problema de transporte generalizado (4.12)-(4.16) pode ser possível encontrar uma solução factível para o problema original (1.18)-(1.25) e, neste caso, obtém-se também um limitante superior inicial para o problema original.

Quando nenhuma das heurísticas consegue encontrar uma solução factível, utiliza-se um procedimento desenvolvido por Diaby (1987) para gerar um limitante superior inicial.



## 4.4 Obtenção dos limitantes inferiores

Serão discutidas nesta seção, as estratégias utilizadas para obtenção do limitante inferior em cada nó da árvore de enumeração. As estratégias são baseadas na relaxação Lagrangiana das restrições de demanda (1.19) ou das restrições de capacidade (1.21).

Nos nós finais da árvore de enumeração, ou seja, quando todas as variáveis de preparação ( $Y_{it}$ ) tiverem sido restringidas em 0 ou 1, não é necessário aplicar a relaxação Lagrangiana, pois o problema (1.18)-(1.25) pode ser reformulado como um problema de transporte.

### 4.4.1 Relaxação Lagrangiana das restrições de demanda (RLD)

A relaxação Lagrangiana da restrição de demanda consiste em dualizar o problema em relação às restrições (1.19). Quando a restrição de demanda é relaxada, as variáveis de estoque ficam irrestritas e o problema pode ser decomposto por períodos. O subproblema para um dado período  $\tau$  tem a seguinte forma:

**(RLD)**

$$\max -Z = c_{rt}(R^c)_\tau + c_{vt}(V^c)_\tau + \sum_i u_{it}X_{it} - \sum_i S_i Y_{it}$$

sujeito a:

$$X_{it} - m_{it}Y_{it} \leq 0 \quad \forall i$$

$$\sum_i (b_i X_{it} + s_i Y_{it}) + (R^c)_\tau + (V^c)_\tau \leq w_\tau + z_\tau$$

$$(R^c)_\tau \leq w_\tau$$

$$(V^c)_\tau \leq z_\tau$$

$$Y_{it} = 0 \text{ ou } 1 \quad \forall i$$

$$X_{it} \geq 0 \quad \forall i$$

$$(R^c)_\tau, (V^c)_\tau \geq 0$$

onde  $(R^c)_\tau$  e  $(V^c)_\tau$  são as quantidades de horas regulares e horas extras não utilizadas no período  $\tau$  e,  $u_{it}$  é o multiplicador de Lagrange para o item  $i$  no período  $\tau$ .

Para resolver o problema acima (RLD), Diaby *et al.* (1992a) utilizam um procedimento de enumeração implícita baseado em programação linear (PL), pois a relaxação do problema RLD por PL produz um problema da mochila contínuo (Yanasse *et al.*, 1997).

#### 4.4.2 Relaxação Lagrangiana das restrições de capacidade (RLC)

Quando se relaxa as restrições de capacidade (1.21), as variáveis de capacidade ( $R_t$  e  $V_t$ ) passam a ser restringidas apenas por seus limitantes superiores (restrições (1.22) e (1.23)), podendo ser eliminadas do problema colocando-as iguais a zero ou iguais aos seus limitantes superiores, dependendo dos custos associados a elas que podem ser positivos ou negativos.

O problema relaxado passa a ser separável por itens e o subproblema para um dado item  $k$  é apresentado da seguinte forma:

**(RLC)**

$$\min \sum_t H_{kt} I_{kt} + \sum_t (b_k v_t) X_{kt} + \sum_t u_{kt} Y_{kt}$$

Sujeito a:

$$I_{kt-1} - I_{kt} + X_{kt} = d_{kt} \quad \forall t$$

$$X_{kt} - m_{kt} Y_{kt} \leq 0 \quad \forall t$$

$$Y_{kt} = 0 \text{ ou } 1 \quad \forall t$$

$$I_{kt}, X_{kt} \geq 0 \quad \forall t$$

onde  $v_t$  é o multiplicador de Lagrange para o período  $t$  e  $u_{kt} = v_t S_k + S_k$ .

O problema acima (RLC), consiste num problema monoestágio sem restrição de capacidade para um único item  $k$ , e pode ser resolvido pelo método de programação dinâmica desenvolvido por Wagner e Whitin (1958). Diaby *et al.* (1992a) utilizam uma técnica eficiente que facilita a resolução do programa dinâmico quando uma variável é ramificada (Diaby, 1993).

### 4.4.3 Limitação dos nós finais

Quando todas as variáveis de preparação do problema (1.18)-(1.25) tiverem sido fixadas em 0 ou 1, este problema pode ser reformulado, através de algumas mudanças de variáveis, como um problema de transporte, para o qual existem métodos de resolução eficientes. Além disso, pode-se reescrever as restrições de capacidade de modo mais econômico assumindo que, em condições de otimalidade, devido aos custos de produção, o tempo de preparação sempre consome as horas normais antes de começar a consumir as horas extras (ver restrições (4.18) e (4.19) do problema de transporte dado a seguir).

Portanto, fixando-se as variáveis de preparação e considerando-se as mudanças de variáveis (4.8)-(4.11), pode-se reescrever o problema original (1.18)-(1.25) como o seguinte problema de transporte:

*Problema de Transporte*

$$\min \sum_i \sum_t \sum_{k>t} (\pi_{itk} L_{itk}) + \sum_i \sum_t \sum_{k>t} (\delta_{itk} L_{itk}) + [K] \quad (4.17)$$

sujeito a:

$$\sum_i \sum_{k \geq t} L_{itk} \leq (w^?)_t = \max \{w_t - \sum_i s_i Y_{it}, 0\}, \quad \forall t \quad (4.18)$$

$$\sum_i \sum_{k \geq t} Z_{itk} \leq (z^?)_t = z_t + \min \{w_t - \sum_i s_i Y_{it}, 0\}, \quad \forall t \quad (4.19)$$

$$\sum_{t \leq k} (L_{ijk} + Z_{ijk}) = b_i d_{ik}, \quad \forall i, k \quad (4.20)$$

$$L_{itk}, Z_{itk} \geq 0, \quad \forall i, t, k \quad (4.21)$$

onde:

$$\pi_{itk} = \begin{cases} c_{rt} & \text{se } k = t \\ c_{rt} + (\sum_{j=t}^{k-1} h_{ij}) / b_i & \text{se } k > t \end{cases}$$

$$\delta_{itk} = \begin{cases} c_{vt} & \text{se } k = t \\ c_{vt} + (\sum_{j=t}^{k-1} h_{ij}) / b_i & \text{se } k > t \end{cases}$$

$$K = \sum_t (c_{rt}RR_t + c_{vt}OR_t) + \sum_i \sum_t c_{si}Y_{it}$$

com:

$$RR_t = \min \left\{ \sum_i s_i Y_{it}, w_t \right\}$$

$$OR_t = \max \{ RR_t - w_t, 0 \}$$

Resolvendo-se este problema de transporte obtém-se a solução para os nós finais da árvore de enumeração.

## 4.5 A estratégia de re-limitação (Método de Otimização do Subgradiente)

A eficiência do método de enumeração implícita depende muito da obtenção de bons limitantes inferiores, o que facilita a exclusão de nós tornando o método mais rápido. Assim, Diaby *et al.* (1992a) utilizam uma estratégia de re-limitação, que consiste em um procedimento de melhoria do limitante inferior obtido pela estratégia de limitação. A estratégia é utilizada somente quando uma regra de re-limitação é satisfeita. As duas regras de re-limitação propostas por Diaby *et al.* (1992a) são:

- Regra baseada no “*gap*”: a estratégia de re-limitação é aplicada somente quando a diferença entre o limitante inferior obtido pela estratégia de limitação e o limitante superior atual, for maior que uma certa tolerância  $\delta$ . Com isso, economiza-se tempo computacional pois, a estratégia não é aplicada em todos os nós mas, somente naqueles em que a probabilidade de se obter melhorias significativas no limitante inferior é grande.
- Regra baseada no nível de profundidade da árvore de enumeração: determina-se previamente em quais níveis de profundidade da árvore de enumeração deverá ser utilizada a estratégia de re-limitação. Assim, escolhe-se um número  $n$  no qual será feita a re-limitação em todo  $n$ -

ésimo nível de profundidade da árvore de enumeração, ou seja, se  $n=1$ , aplica-se a estratégia em todos os nós da árvore e, se  $n$  é maior que o número de variáveis inteiras, não aplica-se a estratégia em nenhum nó.

A estratégia de re-limitação consiste na aplicação do método de otimização do subgradiente, o qual foi descrito no apêndice. Faz-se aqui apenas alguns comentários a respeito desse método:

Considere um problema dado por:

$$\begin{aligned}
 \text{(P)} \quad & Z_P = \min c^T x \\
 & \text{sujeito a:} \\
 & Ax \leq b \\
 & x \in S,
 \end{aligned}$$

onde:  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $S \subseteq \mathbb{R}^n$

Aplicando-se a relaxação Lagrangiana a este problema tem-se:

$$\begin{aligned}
 \text{(LR}(\lambda)\text{)} \quad & z_{LR}(\lambda) = \min \{z(\lambda, x) = c^T x + \lambda^T (Ax - b)\} \\
 & \text{sujeito a:} \\
 & x \in S,
 \end{aligned}$$

onde:  $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$  é o vetor multiplicador de Lagrange.

O problema dual Lagrangiano consiste em encontrar  $\lambda^*$  tal que:

$$\text{(LD)} \quad z_{LR}(\lambda^*) = \max_{\lambda \geq 0} z_{LR}(\lambda),$$

o qual é resolvido pelo método de otimização do subgradiente.

Assim, dado um multiplicador inicial  $\lambda^0$ , o método de otimização do subgradiente gera uma seqüência de multiplicadores  $\lambda^k$  de acordo com a seguinte fórmula geral:

$$\lambda_j^{k+1} = \max[0, \lambda_j^k + \theta_k (Ax^k - b)_j] \quad j = 1, \dots, m$$

onde  $x^k$  é a solução do problema  $(LR(\lambda^k))$  e  $\theta_k > 0$  é o passo, que é dado pela seguinte fórmula:

$$\theta_k = \rho_k [ \bar{Z} - Z_{LR}(\lambda^k) ] / \|Ax^k - b\|^2$$

onde  $0 < \rho_k \leq 2$  e,  $\bar{Z}$  é um limitante superior para o problema dual Lagrangiano ( $\bar{Z} \geq Z_{LR}(\lambda^*)$ ). Mostra-se que  $\lambda^k$  tende a  $\lambda^*$  (solução ótima do problema dual Lagrangiano), quando  $\theta_k$  tende a 0 e  $k$  tende a infinito (Gorry *et al.*, 1972 e Shapiro, 1979).

Logo, para a aplicação do método de otimização do subgradiente é necessário determinar um vetor multiplicador inicial  $\lambda^0$ , um coeficiente  $\rho_0$ , bem como, uma regra de redução deste coeficiente para determinar o tamanho do passo ( $\theta_k$ ) a cada iteração e, por fim, deve-se ter um limitante superior ( $\bar{Z}$ ) para a solução do problema dual Lagrangiano.

- **Escolha do vetor multiplicador inicial ( $\lambda^0$ )**

Uma boa escolha para um multiplicador inicial  $\lambda^0$ , consiste no vetor dual da relaxação por programação linear (PL) associado com a restrição relaxada. A justificativa para esta escolha está no fato de que, quando os valores duais ótimos da relaxação por programação linear ( $\lambda^p$ ) são utilizados na relaxação Lagrangiana, tem-se que o valor da solução obtida pela relaxação Lagrangiana será no mínimo, tão bom quanto o valor da solução obtida pela relaxação por PL, ou seja,  $Z_{LR}(\lambda^p) \geq Z_{PL}(P)$  onde  $Z_{PL}(P)$  é obtido da relaxação por PL do problema P (Geoffrion, 1974).

Para obter este vetor dual da relaxação por PL é preciso resolver o programa linear obtido da relaxação por PL do problema original, o que implica num custo computacional bastante alto para problemas grandes, sendo que, não justificaria a utilização deste procedimento para a obtenção de um  $\lambda^0$  inicial, desde que,  $\lambda^0$  pode ser escolhido arbitrariamente.

No entanto, um dos procedimentos heurísticos para obtenção de uma solução factível inicial utilizados por Diaby *et al.* (1992a), consiste exatamente em resolver a relaxação do problema original por programação linear (ver seção 4.3). Desta forma é possível obter  $\lambda^0$  sem esforço adicional, de acordo com teorema contido no artigo de Diaby *et al.* (1992a).

- **Escolha do coeficiente  $\rho_0$  e da regra de redução do passo**

O coeficiente  $\rho_0$  é escolhido no intervalo  $(0,2]$ , dependendo da diferença entre  $Z_{LR}(\lambda^0)$  e  $Z_{LR}(\lambda^*)$ . Quando esta diferença é grande, deve-se escolher um  $\rho_0$  grande, caso contrário, pequeno. É comum escolher  $\rho_0=2$  e dividir  $\rho_k$  por 2 se não houver melhoria em  $Z_{LR}(\lambda^k)$  depois

de um número predeterminado de passos (Fisher, 1981, Thizy e Van Wassenhove, 1985 e Tempelmeir e Derstroff, 1996). Diaby *et al.* (1992a) iniciam  $\rho_0=1.5$  e multiplicam  $\rho_k$  por 0.6, se a melhoria em  $Z_{LR}(\lambda^k)$  for menor que 0.5% em três passos consecutivos. O procedimento pára se a melhoria for menor que 0.5% em quinze passos consecutivos. Diaby *et al.* (1992a) reportam que estes valores foram obtidos após extensivos testes computacionais. Entretanto, como pode-se observar na literatura, outros autores adotam outras estratégias. Além disso, os próprios autores utilizam uma estratégia diferente em Diaby *et al.* (1992b), onde iniciam  $\rho_0=1.8$  e multiplicam  $\rho_k$  por 0.8, se a melhoria em  $Z_{LR}(\lambda^k)$  for menor que 0.5% em três passos consecutivos. O procedimento pára se a melhoria for menor que 0.5% em quarenta passos consecutivos.

- **Escolha do limitante superior  $\bar{Z}$**

Para a escolha de  $\bar{Z}$  tem-se que: como a solução do problema dual Lagrangiano é um limitante inferior para a solução do problema original ( $Z_{LR}(\lambda^*) \leq Z(P)$ ), um limitante superior para o problema original (P) também será um limitante superior para o problema dual Lagrangiano (LD). Assim, o limitante superior (provavelmente uma solução factível) gerado pelas heurísticas é utilizado como valor de  $\bar{Z}$ . No entanto, quando a diferença entre o limitante superior e inferior é muito grande, utiliza-se outro procedimento, que consiste em tomar  $\bar{Z}=q[Z_{LR}(\lambda^k)]^*$  onde,  $[Z_{LR}(\lambda^k)]^*$  é o melhor limitante Lagrangiano obtido até a iteração k e, q é um escalar maior que 1 (Diaby *et al.* (1992a) usam  $q=1.08$ ). Cabe observar que, quando o valor do limitante inferior é atualizado, o valor de  $\bar{Z}$  também deve ser atualizado, ou seja, multiplica-se q pelo valor do novo limitante inferior.

## 4.6 A estratégia de ramificação

### 4.6.1 Seleção de nós

Dada uma lista de problemas candidatos, existem dois tipos de regras básicas para a seleção de problemas (nós): regras *a priori* e regras *adaptativas*.

Uma regra *a priori* bastante utilizada é a *Last-In-First-Out* (último que chega, primeiro que sai), ou simplesmente LIFO. Nesta regra, o problema selecionado é sempre o último que foi adicionado à lista de candidatos, fazendo assim, uma busca em profundidade na árvore de

enumeração. As principais vantagens da regra LIFO são: a facilidade de implementação e o uso reduzido de memória do computador. Por outro lado, sua principal desvantagem é que o limitante inferior do problema, em geral, demora muito para ser atualizado, dificultando a sondagem dos nós. Diaby *et al.* (1992a) utilizam esta regra, pois, é a que se adapta melhor ao método.

Dentre as regras *adaptativas*, a mais conhecida é a regra de escolha do nó com menor limitante inferior. Suas principais vantagens são: consiste em uma regra otimista com relação a encontrar uma solução factível de boa qualidade e fornece um limitante inferior continuamente não decrescente, facilitando a sondagem dos nós. No entanto, sua principal desvantagem é a necessidade de grande espaço disponível de memória para a sua execução.

#### **4.6.2 Seleção das variáveis**

Quando se utiliza o método de enumeração implícita com programação linear, a variável escolhida para a ramificação é uma variável que é fracionária no nó que está sendo considerado. No entanto, quando se utiliza o método de enumeração implícita com relaxação Lagrangiana, isto não pode ser feito, pois a solução da relaxação Lagrangiana, quando existe, é sempre inteira.

Diante disso, para a escolha da variável de ramificação, os autores consideram um conjunto de quatro estratégias:

A primeira consiste num procedimento baseado em penalidades, sendo que, esta penalidade corresponde a degradação da função objetivo ao se forçar uma variável  $Y_{it}$  com determinado valor binário, a assumir um outro valor binário, ou seja, na solução ótima do problema relaxado, todas as variáveis  $Y_{it}$  assumem valores 0 ou 1 e a penalidade é obtida invertendo-se o valor destas variáveis. Assim, se uma variável vale 0 na solução ótima do problema relaxado, altera-se seu valor para 1 e calcula-se o novo valor da função objetivo. A diferença entre as duas funções objetivo corresponde à penalidade. O cálculo da penalidade é feito para todas as variáveis livres e é escolhida para a ramificação a variável livre que gera maior penalidade, o que contribui para que os nós possam ser podados.

A segunda e a terceira estratégia são baseadas numa mesma idéia básica, sendo que, a segunda é utilizada quando são relaxadas as restrições de capacidade e a terceira é utilizada quando são relaxadas as restrições de demanda. A idéia básica dessas duas estratégias de ramificação é a seguinte:



- Caso a solução do problema relaxado seja infactível: escolha, para ramificação, a variável que causa maior redução da infactibilidade.
- Caso a solução do problema relaxado seja factível: escolha, para ramificação, a variável que faça com que a solução se aproxime mais das condições de folgas complementares.

Escolhida uma variável, a ramificação é feita invertendo seu valor binário em relação a solução do problema relaxado.

Finalmente, a quarta estratégia consiste numa mistura das idéias contidas nas duas primeiras.

## 4.7 Resultados Computacionais

Tem-se a seguir um resumo dos comentários feitos por Diaby *et al.* (1992a) relativos aos testes computacionais por eles realizados.

Inicialmente, foram rodados alguns problemas testes, chegando-se as seguintes conclusões:

- a heurística baseada no trabalho de Thizy e Van Wassenhove (1985) foi a que apresentou melhores resultados (seção 4.3);
- a estratégia de ramificação que deu melhores resultados: foi a combinação da regra *a priori Last-In-First-Out* para seleção de nós, com a quarta estratégia de seleção de variáveis, onde se tem uma mistura das idéias contidas nas duas primeiras (seção 4.6);
- a melhor regra de decisão para re-limitação foi a regra baseada no nível de profundidade da árvore de enumeração (seção 4.5).

Após chegar às conclusões acima, passou-se a resolver problemas utilizando somente os procedimentos que deram melhores resultados. Os resultados finais foram obtidos resolvendo problemas com 50 itens x 8 períodos, 50 x 12, 99 x 8. A título de teste, utilizou-se uma máquina mais potente para rodar problemas com 5000 itens x 30 períodos, onde foram encontradas soluções a 1% do limitante inferior em menos de 45 minutos, no entanto, estes problemas não foram incorporados aos resultados finais.

Diaby *et al.* (1992a) concluíram que, em geral, o método tende a dar boas soluções e um baixo tempo computacional, quanto maior for o número de itens em relação ao número de períodos. Folga de capacidade melhora bastante a qualidade da solução mas não reflete muito no tempo computacional. Custo de produção em hora-extra tem um efeito contrário, ou seja, altos

custos aumentam bastante o tempo computacional mas não afeta muito a qualidade da solução. E, por fim, tem-se que o tempo de preparação afeta ambos: tempo computacional e qualidade da solução, ou seja, quanto maior o tempo de preparação tem-se soluções piores e tempo computacional maior.

---

---

## CAPÍTULO 5:

### Conclusões e Perspectivas Futuras

---

---

Neste trabalho foram estudados problemas de tomada de decisão relacionados com o planejamento tático/operacional em sistemas de produção monoestágios. Tais problemas consistem basicamente em determinar um plano de produção de forma a atender a demanda prevista em cada período. Um sistema utilizado para fazer este planejamento é o MRP, no entanto, em sua forma básica, este sistema não considera restrição de capacidade, podendo gerar planos infactíveis e, além disso, o sistema MRP também não considera os custos envolvidos na produção, no estoque e na preparação das máquinas.

Estas limitações de um sistema MRP compõem a essência do problema abordado nesta tese, o **problema de dimensionamento de lotes monoestágio com restrição de capacidade**. Este problema consiste em dimensionar os tamanhos dos lotes de modo a minimizar os custos de produção, estoque e preparação, considerando recursos de produção limitados. Na utilização dos recursos, podem ser considerados os gastos por quantidade produzida e também o gasto para preparar a produção de um lote de determinado item (*setup time*). A consideração do tempo de preparação aumenta em muito o grau de complexidade do problema. Entretanto, sua incorporação no modelo é importante para retratar um real consumo de recursos.

O objetivo principal deste trabalho foi estudar algumas formulações e métodos de resoluções para o problema de dimensionamento de lotes monoestágio. Este estudo foi baseado principalmente em dois modelos básicos da literatura, contidos nos artigos de Trigeiro *et al.* (1989) e de Diaby *et al.* (1992a).

O primeiro consiste no modelo (1.12)-(1.17) sendo que, o método de resolução desenvolvido por Trigeiro *et al.* (1989) e descrito no capítulo 3, consiste de um método heurístico onde a relaxação Lagrangiana é aplicada às restrições de capacidade, tornando possível a decomposição do problema em vários subproblemas independentes os quais são resolvidos por programação dinâmica. Em seguida, se a solução obtida for infactível, são

realizadas transferências de produção entre períodos, na tentativa de obter uma solução factível. Após a obtenção de uma solução factível, aplica-se um passo de melhoria desta solução. Os multiplicadores Lagrangianos são atualizados pelo método de otimização do subgradiente.

O segundo modelo (1.18)-(1.25) é um pouco mais complexo pois, considera hora extra. O método proposto por Diaby *et al.* (1992a) e descrito no capítulo 4, consiste de um método exato, baseado num procedimento de enumeração implícita, sendo que, o limitante superior inicial é gerado através de algum procedimento heurístico e, os limitantes inferiores a cada nó são gerados por relaxação Lagrangiana da restrição de demanda ou de capacidade. Estes limitantes inferiores podem ser melhorados utilizando-se o método do subgradiente. No entanto, o método do subgradiente não é aplicado em todos os nós, mas somente naqueles que satisfazem uma determinada regra chamada “regra de re-limitação”.

O método de resolução proposto por Trigeiro *et al.* (1989) para o modelo (1.12)-(1.17) foi implementado para custos variáveis no tempo (os autores implementaram para custos constantes no tempo). Posteriormente, foram propostas algumas mudanças no procedimento de melhoria da solução factível (arranjo final) desenvolvido por Trigeiro *et al.* (1989). Estas mudanças foram baseadas numa busca das propriedades de otimalidade do problema. O novo procedimento de melhoria foi implementado e, foram feitos testes computacionais comparando os resultados obtidos pelas duas propostas de arranjo final. Para alguns exemplos, o arranjo final de Trigeiro *et al.* (1989) deu melhores resultados e para outros, o arranjo final modificado teve um melhor desempenho, principalmente para exemplos que consideram custos unitários de produção variáveis no tempo. Entretanto, para ambos os arranjos finais, não ocorreram grandes melhorias em termos percentuais nos resultados, pois, segundo nosso entendimento, o processo de factibilização, em si, já produz uma solução muito boa, restando apenas uma pequena margem para ajustes finais.

Como propostas para futuras pesquisas pode-se citar os seguintes tópicos:

- Estudar e implementar versões mais eficientes do método de Wagner e Whitin (1958), de acordo com as idéias contidas em Evans (1985), Diaby (1993) e Wolsey (1995). Tais versões do método de Wagner e Whitin poderão ser utilizadas na implementação do método de Trigeiro *et al.* (1989) aumentando sua eficiência.
- Expandir a idéia de buscar satisfazer as folgas complementares durante a aplicação da heurística Lagrangiano no método de Trigeiro *et al.* (1989). Para tanto, pode-se tentar fazer implementações mais eficientes da nossa proposta de procedimento de melhoria e, além

disso, pode-se tentar satisfazer as folgas complementares durante a busca da factibilidade, não somente durante o procedimento de melhoria.

- Incorporar técnicas metaheurísticas ao arranjo final modificado, já que este pode ser tratado como uma heurística de busca (Reeves, 1993 e Diaz *et al.* 1996).
- Resolver alguns exemplos do modelo de Trigeiro *et al.* (1989) otimamente utilizando o pacote Cplex e comparar com os resultados obtidos pelas heurísticas.
- Implementar o método exato proposto por Diaby *et al.* (1992).

## Bibliografia

- AFENTAKIS, P., GAVISH, B., KARMARKAR, U. (1984). Computationally Efficient Optimal Solutions to the Lot-Sizing Problem in Multistage Assembly Systems. *Management Science*, v. 30, n. 2, p. 222-239.
- ANTHONY, R. N. (1965). *Planning and Control Systems: A Framework for Analysis*. Harvard University Press, Cambridge, Mass, *apud* em Hox e Candeia (1984).
- BAHL, H. C., RITZMAN, L. P., GUPTA, J. N. D. (1987). Determining Lot Sizes and Resource Requirements: A Review. *Operational Research Society of America*, v. 35, n. 3, p. 329-345.
- BAZARAA, M. S., JARVIS J. J. (1977). *Linear Programming and Network Flows*. - John Wiley e Sons.
- BERRETA, R. E. (1997). *Heurísticas para Otimização do Planejamento da Produção em Sistemas MRP*. Tese de doutorado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).
- BILLINGTON, P. J., MCCLAIN, J. O., THOMAS, L. J. (1983). Mathematical Programming Approaches to Capacity MRP Systems: Review, Formulation and Problem Reduction. *Management Science*, v. 29, n. 10, p. 1126-1141.
- BILLINGTON, P. J., BLACKBURN, J. D., MAES, J., MILLEN, R. A., VAN WASSENHOVE, L. (1994). Multi-Item Lotsizing in Capacitated Multi-stage Serial Systems. *IIE Transactions*, v. 26, n. 2, p. 12-18.
- BITRAN, G. R., YANASSE, H. H. (1982). Computational Complexity of the Lot Size Problem. *Management Science*, v. 28, n. 10, p. 1174-1186.
- BROOKE, A., KENDRICK, D., MEERAUS, A. (1996). *GAMS release 2.25: a user's guide*. Washington: GAMS Development Corporation. 286 p.

- CAMERINI, P. M., FRATTA, L., MAFFIOLI, F. (1975). On Improving Relaxation Methods by Modified Gradient Techniques. *Mathematical Programming Study*, v. 3, p. 26-34.
- CLARK, A. J., SCARF, H. (1960). Optimal Policies for a Multi-Echelon Inventory Problem, *Management Science*. v. 6, p. 475-490.
- DIABY, M. (1987), *Multi-Item Scheduling by Lagrangean Relaxation: Capacitated Lot-Sizing*, Ph. D. Dissertation. State University of New York at Buffalo. Buffalo-NY.
- DIABY, M., BAHL H., KARWAN, M. H., ZIONT, S. (1992a). Capacitated Lot-Sizing and Scheduling by Lagrangean Relaxation. *European Journal of Operational Research*, v. 59, p. 444-458.
- DIABY, M., BAHL H., KARWAN, M. H., ZIONT, S. (1992b). A Lagrangean Relaxation Approach for Very-Large-Scale Capacitated Lot-Sizing. *Management Science*, v. 38, n. 9, p. 1329-1340.
- DIABY, M. (1993). Efficient Post-Optimization Analysis Procedure for the Dynamic Lot-Sizing Problem. *European Journal of Operational Research*, v. 68, p. 134-138.
- DIAZ, A., GLOVER, F., GHAZIRI, H. M., GONZÁLEZ, J. L., LAGUNA, M., MOSCATO, P., TSENG, F. T., (1996). *Optimización Heurística y Redes Neuronales*. Editorial Paraninfo, Espanha.
- EVANS, J. R. (1985). An Efficient Implementation of the Wagner-Whitin Algorithm for Dynamic Lot-Sizing. *Journal of Operational Management*, v. 5, n. 2, p. 229-235.
- FISHER, M. L. (1981). The Lagrangean Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems. *Management Science*, v. 27, n. 1, p. 1-18.
- FLORENTINO, H. O. (1990). *Relaxação Lagrangiana em Programação Inteira*. Tese de Mestrado, Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos (ICMSC-USP).

- FLORIAN M., LENSTRA J. K., RINNOY KAN, A. H. G. (1980). Deterministic Production Planning Algorithms and Complexity. *Management Science*, v. 26, n. 7, p. 669-679.
- GEOFRION, A. M. (1974). Lagrangean Relaxation for Integer Programming. *Mathematical Programming Study*, v. 2, p. 82-114.
- GORRY, G. A., SHAPIRO, J. F., WOLSEY, L. A. (1972). Relaxation Methods for Pure and Mixed Integers Programming Problems. *Management Science*, v. 18, n. 5, p. 229-239.
- HELD, M., WOLFE, P., CROWEDER, H. (1974). Validation of Subgradient Optimization. *Mathematical Programming*, v. 6, p. 62-68.
- HILLIER, F. S., LIEBERMAN, G. J. (1988). *Introdução a Pesquisa Operacional*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo.
- HOX, A. C., CANDEA, D. (1984). *Production and Inventory Management*. Prentice-Hall, Inc.
- JOHNSON, L. A., MONTGOMERY, D. C. (1974). *Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control*. New York: John Wiley e Sons.
- KUIK, R., SALOMON, M., VAN WASSENHOVE, L. N. (1994). Batching Decisions: Structure and Models. *European Journal of Operational Research*, v. 75, p. 243-263.
- LUENBERGER, D. G. (1984). *Introduction to Linear and Non-Linear Programming*. Second Edition, Addison-Wesley, Reading, Mass.
- MAES, J., VAN WASSENHOVE, L. N. (1991). *Capacitated Dynamic Lotsizing Heuristics for Serial Systems*. *International Journal of Production Research*, v. 29, n. 6, p. 1235-1249.
- MAES, J., MCCLAIN, J. O., VAN WASSENHOVE, L. N. (1991). *Multilevel Capacitated Lotsizing Complexity and LP Based Heuristic*. *European Journal of Operational Research*, v. 53, p. 131-148.



- NAHMIAS, S. (1989). *Production and Operations Analysis*. 2nd.
- NEMHAUSER, G. L., WOLSEY, L. A. (1988). *Integer and Combinatorial Optimization*. Wiley-Interscience Publication.
- REEVES, C.R. (1993). *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems*. Blackwell.
- SHAPIRO, J. F. (1979). *A Survey of Lagrangean Techniques for Discrete Optimization*. *Annals of Discrete Mathematics*, v. 15, p. 113-118.
- TEMPELMEIER, H., DERSTROFF, M. (1996). A Lagrangean-Based Heuristic for Dynamic Multilevel Multiitem Constrained Lot sizing with Setup Time. *Management Science*, v. 42, n. 5, p. 738-757.
- THIZY, J. M., VAN WASSENHOVE, L. N. (1985). Lagrangean Relaxation for the Multi-Item Capacitated Lot-Sizing Problem: A Heuristic Implementation. *AIIE Transactions*, v. 17, n. 2, p. 64-74.
- THOMAS, L. J., MCCLAIN, J. O. (1993). *An Overview of Production Planning*. Handbooks in Operational Research and Management Science, editado por Graves, S. C., editora Elsevier.
- TOLEDO, F. M. B. (1998). *Dimensionamento de Lotes em Máquinas Paralelas*. Tese de doutorado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).
- TRIGEIRO, W. W., THOMAS, L. J., MCCLAIN, J. O. (1989). Capacitated Lot Sizing With Setup Times. *Management Science*, v. 35, n. 3, p. 353-366.
- USING the CPLEX Callable Library. (1995). CPLEX Optimizaton, Inc. 344 p.
- WAGNER, H. M., WHITIN, T. M. (1958). Dynamic Version of the Economic Lot Size Model. *Management Science*. v.5, n. 1, p. 89-96.

WOLSEY, L. A. (1995). Progress with Single-Item Lot-Sizing. *European Journal of Operational Research*, v. 86, p. 395-401.

YANASSE, H. H. *et al.* (1997). *O Problema de Corte e Empacotamento e Aplicações Industriais*. Minicurso do XX CNMAC e 2<sup>a</sup> Oficina Nacional de PCE.

# APÊNDICE

## Introdução

O conteúdo deste apêndice consiste em uma fundamentação teórica onde estão contidos resumos relacionados a alguns tópicos que foram utilizados no decorrer deste trabalho. Os tópicos resumidos são: Relaxação Lagrangiana, o Método de Otimização do Subgradiente e o Método de Enumeração Implícita.

### Relaxação Lagrangiana

(Nemhauser e Wolsey, 1988 e Geoffrion, 1974)

Considere o seguinte problema de programação inteira:

$$\begin{aligned} \text{(IP)} \quad z_{\text{IP}} &= \min \{f(x) = c^T x : x \in S\}, \\ &\text{onde} \\ S &= \{x \in Z_+^n : Ax \leq b\} \end{aligned}$$

Observe que:  $c \in R^n$ ,  $A \in R^{m \times n}$ ,  $b \in R^m$

Uma relaxação de IP é qualquer problema de minimização:

$$\text{(RP)} \quad z_R = \min \{f_R(x) : x \in S_R\}$$

com as seguintes propriedades:

$$\text{(R1)} \quad S \subseteq S_R$$

$$\text{(R2)} \quad f(x) \geq f_R(x) \quad \forall x \in S$$

Existem várias técnicas de relaxação de um problema inteiro. Dentre elas, tem-se a relaxação Lagrangiana a qual, geralmente, é aplicada quando a matriz de restrições apresenta uma característica especial, tendo um grupo de restrições fáceis e outro grupo de restrições

complexas. Cabe observar aqui, que existem muitos problemas que apresentam estas características.

O problema inteiro definido anteriormente, pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 & z_{IP} = \min c^T x \\
 & \text{sujeito a :} \\
 \text{(IP)} \quad & A^1 x \leq b^1 \text{ complicada} \\
 & A^2 x \leq b^2 \text{ simples} \\
 & x \in Z_+^n
 \end{aligned}$$

onde:  $A^1 \in \mathbb{R}^{m1 \times n}$ ,  $A^2 \in \mathbb{R}^{m2 \times n}$ ,  $b^1 \in \mathbb{R}^{m1}$ ,  $b^2 \in \mathbb{R}^{m2}$

A idéia é relaxar as restrições complicadas colocando-as na função objetivo como uma “penalização”. Assim, a relaxação Lagrangiana do problema acima, com relação ao conjunto de restrições complicadas é definida associando a este conjunto um vetor  $\lambda \geq 0$ , denominado de multiplicador de Lagrange ou variáveis duais. O problema Lagrangiano obtido utilizando a técnica de relaxação Lagrangiana para o problema (IP) é dado a seguir:

$$\begin{aligned}
 & z_{LR}(\lambda) = \min \{z(\lambda, x) = c^T x + \lambda^T (A^1 x - b^1)\} \\
 \text{(LR}(\lambda)\text{)} \quad & \text{sujeito a :} \\
 & x \in S_{LR} = \{x \in Z_+^n : A^2 x \leq b^2\}
 \end{aligned}$$

onde:  $\lambda \in \mathbb{R}_+^{m1}$

A partir da definição de relaxação, demonstra-se facilmente que  $LR(\lambda)$  realmente é uma relaxação de IP. O problema  $LR(\lambda)$  não contém as restrições complicadas, as quais foram incluídas na função objetivo como uma “penalidade”  $\lambda^T (A^1 x - b^1)$ .

Serão apresentadas a seguir, algumas definições do conceito de dualidade que serão necessárias posteriormente.

*Definição 1:* Um dual fraco de IP é qualquer problema de maximização:

$$\begin{aligned}
 & z_D = \max z_D(u) \\
 \text{(DP)} \quad & \text{sujeito a :} \\
 & u \in S_D
 \end{aligned}$$

que satisfaça:

$$(D1) \quad z_D(u) \leq c^T x \quad \forall x \in S \text{ e } \forall u \in S_D$$

Observe que, se o problema dual for factível, o valor da função objetivo para qualquer solução do problema original (IP), será sempre maior ou igual ao valor da função objetivo dual para qualquer solução do problema dual (LD). No entanto, se o dual não tem solução ótima ( $z_D = \infty$ ), então o problema original é infactível ( $S = \emptyset$ ).

*Definição 2:* Um dual forte de IP é um dual fraco que satisfaça:

$$(D2) \quad \begin{aligned} &\text{Se } S \neq \emptyset \text{ e } z_{IP} > -\infty, \text{ então} \\ &\exists u^0 \in S_D \text{ e } \exists x^0 \in S \text{ tq } z_D(u^0) = cx^0 \end{aligned}$$

Chama-se de “*gap*” de dualidade, a diferença entre a solução do problema original e a solução do problema dual:  $\Delta_D = Z_{IP} - Z_D$ . Observe que no problema dual forte  $\Delta_D = 0$ , ou seja, não tem “*gap*” de dualidade, já no problema dual fraco  $\Delta_D \geq 0$ .

*Proposição 1:* O problema dual de uma relaxação de IP é também dual de IP.

A qualidade de uma relaxação de IP, pode ser avaliada pela proximidade do valor da função objetivo desta relaxação e do valor da função objetivo do problema original (IP). Assim, voltando ao problema Lagrangiano, como se trata de uma relaxação de IP e o problema é de minimização temos que:  $z_{LR}(\lambda) \leq z_{IP}$ . O maior dos limitantes inferiores disponível da família infinita de relaxações  $\{LR(\lambda)\}_{\lambda \geq 0}$  é  $z_{LR}(\lambda^*)$ , onde  $\lambda^*$  é uma solução ótima do seguinte problema:

$$(LD) \quad z_{LD} = \max_{\lambda \geq 0} z_{LR}(\lambda)$$

O problema LD é chamado dual Lagrangiano com relação às restrições  $A^1 x \leq b^1$ .

Observe que, se  $Z_{IP} = Z_{LD}$  então  $Z_{IP}$  representa o valor ótimo para a função objetivo do problema original (IP) e, a solução  $x^*$  associada a  $Z_{IP}$  representa a solução ótima do problema (IP).

Existem várias formas de caracterizar problemas onde  $Z_{IP} = Z_{LD}$ . Uma delas é a seguinte:

*Teorema 1* (Geoffrion, 1974): Tem-se que  $z_{IP} = z_{LD}$  se, e somente se, existem  $\lambda^* \geq 0$  e  $x^* \in S$  tais que satisfazem as seguintes condições:

- i.  $z_{LR}(\lambda^*) = z(\lambda^*, x^*)$ ,  $x^*$  é ótima para o problema Lagrangiano  $LR(\lambda)$ .
- ii.  $A^1 x^* \leq b^1$ ,  $x^*$  é factível para o problema original IP.
- iii.  $(\lambda^*)^T (A^1 x^* - b^1) = 0$ ,  $(\lambda^*, x^*)$  satisfaz as condições de folgas complementares.

Tem-se então que  $x^*$  é uma solução ótima do problema original IP se satisfaz as três condições. No entanto, se satisfaz somente (i) e (ii), tem-se que  $x^*$  é uma solução  $\varepsilon$ -ótima para o problema original (IP), onde  $\varepsilon = (\lambda^*)^T (A^1 x^* - b^1)$ .

## Método de Otimização do Subgradiente

(Florentino, 1990, Held *et al.*, 1974 e Camerini *et al.*, 1975)

Quando se tem o problema dual Lagrangiano (LD), vários métodos podem ser usados para se obter a melhor aproximação para a solução  $\lambda^*$ . O mais utilizado tem sido o método de otimização do subgradiente o qual tem produzido bons resultados (Diaby *et al.*, 1992a). Este método, quando utilizado para a resolução do problema dual Lagrangiano consiste num processo iterativo que, através de um conjunto inicial de multiplicadores de Lagrange, gera uma seqüência de multiplicadores cujo limite tende à solução do problema dual Lagrangiano.

Considere o problema dual Lagrangiano do problema IP:

$$(LD) \quad z_{LD} = \max_{\lambda \geq 0} z_{LR}(\lambda)$$

onde:  $z_{LR}(\lambda) = \min \{z(\lambda, x) = c^T x + \lambda^T (A^1 x - b^1)\}$

Logo, o problema fica:

$$(LD) \quad z_{LD} = \max_{\lambda \geq 0} \{ \min \{z(\lambda, x) = c^T x + \lambda^T (A^1 x - b^1)\} \}$$

*Definição 3:* Uma função  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  é côncava se:

$$g(\alpha y^1 + (1 - \alpha)y^2) \geq \alpha g(y^1) + (1 - \alpha)g(y^2) \text{ para todo } y^1, y^2 \in \mathbb{R}^n \text{ e } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

*Proposição 2:* A função  $Z_{LR}(\lambda)$  é côncava em  $\lambda$  e linear por partes.

*Definição 4:* Um vetor  $s(\lambda^0) \in \mathbb{R}^n$  é um subgradiente da função côncava  $Z_{LR}(\lambda)$  no ponto  $\lambda^0$  se:

$$Z_{LR}(\lambda) \leq Z_{LR}(\lambda^0) + (\lambda - \lambda^0)^T s(\lambda^0), \text{ para todo } \lambda \geq 0.$$

Observa-se que, se  $Z_{LR}(\lambda)$  for diferenciável no ponto  $\lambda^0$  então  $s(\lambda^0) = \nabla Z_{LR}(\lambda^0)$ , onde  $\nabla Z_{LR}(\lambda^0)$  é o gradiente de  $Z_{LR}(\lambda)$  no ponto  $\lambda^0$ .



*Definição 5:* O conjunto  $\partial Z_{LR}(\lambda^0) = \{s \in \mathbb{R}^n : s \text{ é um subgradiente de } Z_{LR}(\lambda) \text{ em } \lambda^0\}$  é chamado subdiferencial de  $Z_{LR}(\lambda)$  em  $\lambda^0$ .

Tem-se que  $\partial Z_{LR}(\lambda^0) \neq \emptyset$ . E ainda, se  $Z_{LR}(\lambda) \in C^1$ , então  $\partial Z_{LR}(\lambda^0)$  contém um único elemento:  $\nabla Z_{LR}(\lambda^0)$ .

*Proposição 3:* Seja  $Z_{LR}(\lambda)$  uma função côncava em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\lambda^*$  é uma solução de  $\max\{Z_{LR}(\lambda) : \lambda \geq 0\}$  se, e somente se,  $0 \in \partial Z_{LR}(\lambda^*)$ .

*Proposição 4:* O vetor  $(Ax - b)$  é um subgradiente de  $Z_{LR}(\lambda)$  no ponto  $\lambda^0$ .

### ***Algoritmo do Subgradiente:***

*Passo 1:* (Iniciação): Escolha um ponto inicial  $\lambda^k$  e faça  $k = 1$ .

*Passo 2:* Determine um subgradiente  $s(\lambda^k) \in \partial Z_{LR}(\lambda^k)$ . Se  $s(\lambda^k) = 0$ , PARE ( $\lambda^k$  é uma solução ótima).

*Passo 3:* Faça  $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \theta_k s(\lambda^k)$  para  $\theta_k > 0$ . Faça  $k \leftarrow k + 1$  e volte ao passo 2.

Não há nada que garanta que a direção do subgradiente seja uma direção de subida, por isso, a convergência do método depende essencialmente da escolha do tamanho do passo  $\theta_k$ . É possível mostrar que o método converge se forem satisfeitas as seguintes condições:

i)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k = 0$

ii)  $\sum_{k=1}^{\infty} \theta_k = \infty$

Assim, no algoritmo acima usa-se um dos seguintes procedimentos para a escolha do passo:

1- A série divergente:  $\sum_{k=1}^{\infty} \theta_k \rightarrow \infty$ ,  $\theta_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Esta escolha é teoricamente correta, mais a convergência é muito lenta.

2- A série geométrica:  $\theta_k = \theta_0 \rho^k$ , ou  $\theta_k = [\bar{Z} - Z_{LR}(\lambda^k)] \rho^k / \|s(\lambda^k)\|^2$  onde  $0 < \rho < 2$  e  $\bar{Z}$  é um limitante superior para o problema dual Lagrangiano.

Teoricamente, o algoritmo do subgradiente pode parar quando em alguma iteração  $k$ , encontrar  $s(\lambda^k) = 0 \in \partial Z_{LR}(\lambda^k)$ . Mas esta situação dificilmente acontecerá, por isso adota-se um número máximo de iterações, ou um critério de parada baseado na não melhoria da solução após um certo número de iterações.

## Método de Enumeração Implícita (*Branch-and-Bound*)

(Hillier e Lieberman, 1988 e Nemhauser e Wolsey, 1988)

Para se resolver problemas de programação inteira com um número finito de soluções viáveis, é natural que se considere o uso de algum tipo de procedimento de enumeração para encontrar uma solução ótima. Infelizmente, para problemas práticos este número finito geralmente é muito grande, sendo impraticável a enumeração exaustiva de todas as soluções viáveis, mesmo com a capacidade dos computadores atuais. Por isso é preciso investir num procedimento de enumeração que seja inteligentemente estruturado, para que apenas uma fração muito pequena das soluções factíveis realmente precise ser examinada. É exatamente esta a idéia da técnica de enumeração implícita.

Suponha que a função objetivo deva ser minimizada e que um limite superior para o valor ótimo da função objetivo esteja disponível (usualmente, este é o valor da função objetivo para a melhor solução factível até o momento). O primeiro passo é subdividir o conjunto de todas as soluções factíveis em diversos subconjuntos e, para cada um, obter um limite inferior para o valor da função objetivo dentro do respectivo subconjunto. Aqueles subconjuntos cujos limites inferiores excedam o limite superior disponível serão então excluídos de outras considerações. Um dos subconjuntos remanescentes, digamos, aquele com menor limite inferior, será subdividido novamente em diversos subconjuntos. Seus limites inferiores serão obtidos, um de cada vez, e serão usados como anteriormente para excluir algum destes subconjuntos de futuras considerações. Dentre todos os subconjuntos remanescentes, um outro é selecionado para nova subdivisão e assim por diante. Este processo é repetido seguidamente, até que seja encontrada uma solução factível tal que o valor correspondente da função objetivo não seja maior que o limite inferior para qualquer subconjunto. Uma tal solução terá que ser ótima uma vez que nenhum dos subconjuntos pode conter uma solução melhor.

O método será formalizado a seguir: considere o problema geral de programação inteira

$$(IP) \quad Z_{ip} = \min \{c^T x : x \in S\}, \text{ onde } S = \{x \in Z_+^n : Ax \leq b\}$$

Inicialmente, serão dadas definições de divisão e partição.

*Definição 6:* Se  $S = S^1 \cup S^2 \cup S^3 \cup \dots \cup S^k$  então  $\{S^i : i=1, 2, \dots, k\}$  é uma divisão de  $S$ . Ainda, se  $S^i \cap S^j = \emptyset$  para  $i, j=1, \dots, k; (i \neq j)$ , a divisão é uma partição.

*Proposição 5:* Sejam:

$$(IP^i) \quad Z_{IP}^i = \min\{c^T x : x \in S^i\}, i = 1, \dots, k$$

onde  $\{S^i : i=1, 2, \dots, k\}$  é uma divisão de  $S$ . Então  $Z_{IP} = \min Z_{IP}^i, i = 1, \dots, k$ .

Esta proposição diz que a solução do problema original é igual a menor solução possível dentre todos os subproblemas obtidos da divisão de  $S$ . Esta idéia é fundamental para a estratégia do método de enumeração implícita.

Suponha que  $S = S^1 \cup S^2 \cup S^3 \cup \dots \cup S^k$ . Se nenhuma divisão adicional de  $S^i$  é necessária, então a árvore enumerativa das soluções pode ser podada no nó correspondente a  $S^i$ , ou simplesmente  $S^i$  pode ser podado.

*Proposição 6:* A árvore de enumeração pode ser podada no nó correspondente a  $S^i$ , se uma das seguintes condições ocorrer:

1- Infactibilidade:  $S^i = \emptyset$  (não existe solução factível no subconjunto  $S^i$ ).

2- Otimalidade: Uma solução ótima do subproblema  $IP^i$  é encontrada, não precisando fazer mais subdivisões.

3- Valor dominante:  $Z_{IP}^i \geq Z_{IP}$ .

A utilização direta desta proposição nem sempre é possível na prática. Assim, considere a seguinte relaxação deste problema.

*Definição 7:* Seja  $R^i$  uma relaxação do problema  $IP^i$  com  $S^i \subseteq S_R^i$  e  $Z_R^i(x) \leq c^T x$  para  $x \in S^i$ ,  $Z_R^i = \min\{Z_R^i(x) : x \in S_R^i\}$ .

*Proposição 7:* A árvore de enumeração pode ser podada no nó correspondente a  $S^i$  se uma das seguintes condições ocorrer:

1-  $R^i$  é infactível :  $S_R^i = \emptyset$

2- Uma solução ótima  $x_R^i$  de  $R^i$  satisfaz  $x_R^i \in S^i$  e  $Z_R^i = c^T x_R^i$ .

3-  $Z_R^i \geq \bar{Z}_{IP}$ , onde  $\bar{Z}_{IP}$  é o valor de alguma solução factível de IP.

*Proposição 8:* Considere  $D^i$  como sendo o problema dual de  $R^i$  ou dual fraco de  $IP^i$ . O subconjunto  $S^i$  pode ser podado se uma das seguintes condições ocorre.

1- O valor objetivo de  $D^i$  é ilimitado superiormente.

2-  $D^i$  tem uma solução factível cujo valor da função objetivo é  $\geq \bar{Z}_{IP}$ .

Observe que é bastante interessante trabalhar com o dual do problema relaxado, pois, com o problema primal, de acordo com a proposição 3, a poda por dominância só ocorre quando se consegue chegar no ótimo do problema relaxado ( $R^i$ ), ou seja, este problema tem que ser resolvido. No entanto, quando se utiliza o problema dual ( $D^i$ ), a poda por dominância pode ocorrer antes da otimalidade, basta encontrar uma solução factível que seja maior do que o limitante superior disponível.

#### *Algoritmo Geral para o Método de Enumeração Implícita*

Elementos necessários:

$\mathfrak{S}$  = Lista de problemas inteiros  $\{IP^i\}$  que devem ser investigados ou, nós abertos.

$S^i$  = Conjunto das soluções factíveis do problema  $IP^i$  pertencente a  $\mathfrak{S}$ .

$\underline{Z}$  = Limitante inferior para o valor objetivo de IP (relaxação).

$\bar{Z}_{IP}$  = Limitante superior para o valor objetivo de IP (solução. factível).

*Passo 1* – (Iniciação):  $\mathfrak{S} = \{IP\}$ ,  $S^0 = S$ ,  $\bar{Z}_{IP} = \infty$ ,  $\underline{Z} = -\infty$ .

*Passo 2* – (Teste de parada): Se  $\mathfrak{S} = \emptyset$ , então  $x^0$  tal que  $\bar{Z}_{IP} = c^T x^0$  é a solução ótima.

*Passo 3 – (Problema de seleção e relaxação):* Escolha  $IP^i \in \mathfrak{S}$ . Faça  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S} - \{IP^i\}$ . Resolva o problema relaxado  $R^i$ :  $Z_R^i = \min\{Z_R^i(x) : x \in S_R^i\}$  e  $x_R^i$  é a solução ótima do problema relaxado (se existir).

*Passo 4 – (Poda):* a) Se  $Z_R^i \geq \bar{Z}_{IP}$ , vá para o *passo 2*.

b) Se  $x_R^i \notin S^i$ , vá para o *passo 5*.

c) Se  $x_R^i \in S^i$  e  $c^T x_R^i < \bar{Z}_{IP}$ , faça:  $\bar{Z}_{IP} = c^T x_R^i$ . Retire de  $\mathfrak{S}$  todos os problemas com  $\underline{Z}^i \geq \bar{Z}_{IP}$ . Se  $c^T x_R^i = Z_R^i$  vá para o *passo 2*, caso contrário vá para o *passo 5*.

*Passo 5 – (Divisão):* Seja  $\{S^{ij}\}_{j=1}^k$  a divisão de  $S^i$ . Inclua os problemas  $\{IP^{ij}\}_{j=1}^k$  em  $\mathfrak{S}$ , e  $\underline{Z}^{ij} = Z_R^i$  para  $j=1, \dots, k$ . Vá para o *passo 2*.

