

Tópicos de Séries de Fourier e de Teoria de Aproximação

Dimitar K. Dimitrov

Contents

Preface	1
1 Aproximação em Espaços Lineares	3
1.1 Melhor Aproximação em Espaços Lineares Normados	3
1.2 Aproximação em Espaços de Hilbert	9
1.2.1 Aproximação em Espaços de Hilbert com Dimensão Finita	9
1.2.2 Teorema de Pitágoras e Teorema de Bessel	20
2 Séries de Fourier	25
2.1 Definições e Exemplos	25
2.1.1 Definições	25
2.1.2 Exemplos	30
2.2 Convergência da Série de Fourier em $L_2[-\pi, \pi]$	37
2.3 Convergência em um ponto	41
2.3.1 Formas integrais das séries de Fourier	41
2.3.2 Funções com Variação Limitada	47
2.3.3 Critérios de Dini-Lipschitz e Dirichlet-Jordan	52
2.4 Existência de funções contínuas com séries de Fourier divergentes	61
2.5 Convergência em $L_p[-\pi, \pi]$	65
2.6 Convergência em $L_p[-\pi, \pi]$	69
3 Aproximação Uniforme por Polinômios	73
3.1 Teorema de Chebyshev	73
3.2 Aproximação por Operadores Positivos	81

<i>CONTENTS</i>	1
3.2.1 Teorema de Korovkin	82
3.2.2 Polinômios de Bernstein	85
3.3 Teorema de Jackson	90
3.3.1 Preliminares	90
3.3.2 Demonstração de Jackson	93
3.3.3 Demonstração de Rivlin	101
4 Polinômios Ortogonais	113

Capítulo 1

Aproximação em Espaços Lineares

1.1 Melhor Aproximação em Espaços Lineares Normados

Seja F um espaço linear dado. Introduzimos em F uma distância, isto é, para qualquer par de elementos f, g de F colocamos em correspondência o número $\rho(f, g)$, que satisfaz às seguintes exigências:

- 1) $\rho(f, g) \geq 0$ e a igualdade vale se, e somente se, $f = g$,
- 2) $\rho(f, g) = \rho(g, f)$ (simetria),
- 3) $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$ para todo $f, g, h \in F$.

Quando introduzimos uma distância a um espaço linear temos um *espaço linear métrico*.

Formularemos o problema de aproximação em um espaço linear métrico F .

Sejam $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ elementos arbitrários linearmente independentes de F . Denotemos por Ω_n o conjunto de todas as combinações lineares de $\{\varphi_k\}_{k=0}^n$, isto é,

$$\Omega_n := \left\{ \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k \quad : \quad (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \right\}.$$

A quantidade

$$\rho(f, \varphi) := \inf \{ \rho(f, \varphi) \quad : \quad \varphi \in \Omega_n \},$$

é chamada de *melhor aproximação de f* por elementos de Ω_n . Se existe um elemento φ_f de Ω_n para o qual a igualdade acima é atingida, isto é, para o qual,

$$\rho(f, \varphi_f) = \inf \{ \rho(f, \varphi) : \varphi \in \Omega_n \},$$

este elemento φ_f é chamado *elemento da melhor aproximação* de f .

Depois dessa formulação do problema de aproximação, surgem as seguintes questões básicas:

- Existe o elemento da melhor aproximação?
- Se tal elemento existe, é único?
- Como pode ser construído o elemento da melhor aproximação?

Existe uma grande classe de espaços lineares métricos, onde a resposta da questão sobre a existência do elemento da melhor aproximação pode ser encontrada. Esses espaços são chamados *espaços lineares normados*. Vamos relembrar brevemente a definição de espaço normado.

Seja F um espaço linear. Dizemos que em F é introduzida uma norma se, para todo elemento f de F , é colocado em correspondência um número $\|f\|$ (chamado *norma* de f) e essa correspondência satisfaz as seguintes exigências:

- 1) $\|f\| \geq 0$ (a igualdade vale se, e somente se, $f \equiv 0$);
- 2) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ para todo λ ;
- 3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ para todo $f, g \in F$.

Um espaço linear onde é introduzida uma norma, é chamado de espaço linear normado.

Toda norma $\|\cdot\|$ origina uma distância da seguinte maneira:

$$\rho(f, g) := \|f - g\|.$$

Não é difícil verificar que a distância $\rho(f, g)$ assim definida realmente satisfaz as propriedades citadas acima. Deixaremos essa verificação como exercício.

Toda norma em F pode ser considerada como função de f , definida em F .

Teorema 1 *A norma é uma função contínua em relação à distância, originada por ela.*

Demonstração. Primeiro, provaremos a desigualdade

$$||f|| - ||g|| \leq \|f - g\|.$$

De fato,

$$\|f\| = \|f - g + g\| \leq \|f - g\| + \|g\|$$

e, daí segue que $\|f\| - \|g\| \leq \|f - g\|$. Analogamente, $\|g\| - \|f\| \leq \|g - f\| = \|f - g\|$.

Vamos mostrar que $\|\cdot\|$ é uma função contínua de f . Seja $\epsilon > 0$ e $\delta = \epsilon$. Então, se g é tal que $\rho(f, g) \leq \delta$

$$||f|| - ||g|| \leq \|f - g\| = \rho(f, g) \leq \epsilon.$$

Logo, $\|\cdot\|$ é uma função contínua de f . ■

Consideraremos o espaço linear

$$\mathbb{R}^n = \{f = (f_1, \dots, f_n) : f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}\}.$$

de vetores reais.

Teorema 2 *Toda norma em $\mathbb{R}^n$ é uma função contínua com relação às coordenadas do elemento.*

Demonstração. Denotemos por

$$\mathbf{e}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad k = 1, \dots, n,$$

os vetores base em $\mathbb{R}^n$. Então, todo vetor $f = (f_1, \dots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito da forma $f = f_1 \mathbf{e}_1 + \dots + f_n \mathbf{e}_n$ e, conseqüentemente,

$$| \|f\| - \|g\| | \leq \|f - g\| = \left\| \sum_{i=1}^n (f_i - g_i) \mathbf{e}_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |f_i - g_i| \|\mathbf{e}_i\|.$$

Então, se $f_i = g_i$, $i, k = 1, \dots, n$, $i \neq k$

$$||f|| - ||g|| \leq |f_k - g_k| \|\mathbf{e}_k\|$$

Assim, a norma é uma função de Lipschitz com relação a k -ésima coordenada. Logo, é uma função contínua com relação às suas coordenadas. ■

Em um espaço linear F podem ser introduzidas normas de maneiras diferentes. Por exemplo, em $\mathbb{R}^n$ usam-se frequentemente as normas:

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty &:= \max_{1 \leq i \leq n} |f_i|, \\ \|f\|_1 &:= |f_1| + \cdots + |f_n|, \\ \|f\|_2 &:= \left(\sum_{i=1}^n f_i^2 \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

A última norma é chamada Euclideana, pois ela determina a distância de Euclides

$$d(f, g) := \|f - g\|_2 = \left\{ \sum_{k=1}^n (f_k - g_k)^2 \right\}^{1/2}.$$

Definição 1 Dizemos que duas normas $\nu(f)$ e $\mu(f)$ são equivalentes em F , se existem números positivos m e M , tais que

$$m\mu(f) \leq \nu(f) \leq M\mu(f)$$

para toda $f \in F$.

Teorema 3 Quaisquer duas normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.

Demonstração. É suficiente provar que toda norma ν é equivalente à norma de Euclides $\|\cdot\|_2$. Para isso, introduzimos a esfera com raio um em $\mathbb{R}^n$,

$$S := \left\{ (f_1, \dots, f_n) : \sum_{i=1}^n f_i^2 = 1 \right\}.$$

S é um conjunto limitado. Além disso, de acordo com o Teorema (2), $\nu(f) = \nu(f_1, \dots, f_n)$ é função contínua de f_i , $-\infty < f_i < \infty$. Pelo teorema de Weierstrass, $\nu(f)$ atinge o seu valor mínimo em S . Consequentemente, existe um elemento f^* de S , tal que

$$m := \inf \{ \nu(f) : (f_1, \dots, f_n) \in S \} = \nu(f^*).$$

Obviamente $m \geq 0$. Além disso, $m > 0$. De fato, a hipótese $m = 0$ implica em $\nu(f^*) = 0$ e, consequentemente, $f^* = 0$, isto é, $f_1^* = \cdots = f_n^* = 0$,

uma contradição com o fato que $f^* \in S$.

Então, $\nu(f) \geq m > 0$ para toda $f \in S$.

Seja f um elemento não nulo de F . Então, $f/\|f\|_2 \in S$ e de acordo com inequação que acabamos de provar, temos

$$\nu(f) = \nu\left(\frac{f}{\|f\|_2}\|f\|_2\right) = \|f\|_2 \nu\left(\frac{f}{\|f\|_2}\right) \geq m\|f\|_2.$$

Provamos que $m\|f\|_2 \leq \nu(f)$ para todo $f \in F$.

Analogamente, escolhendo

$$M := \sup \{\nu(f) \quad : \quad (f_1, \dots, f_n) \in S\},$$

obtemos

$$\nu(f) \leq M\|f\|_2 \quad \text{para todo } f \in F.$$

■

Corolário 1 *Toda esfera $S_r = \{(f_1, \dots, f_n) : \|f\| \leq r < \infty\}$ em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto limitado e fechado.*

Demonstração. Seja f um elemento da esfera S_r . Então, $\|f\| \leq r$ e, consequentemente, existe uma constante M tal que $\|f\|_\infty \leq Mr$. Segue, então a inequação $|f_i| \leq Mr$, que mostra que o conjunto S_r é limitado.

Mostraremos que S_r é fechado. Seja $\{f^{(n)}\}$ uma sequência arbitrária de elementos $f^{(n)} \in S_r$, que converge para algum elemento g de $\mathbb{R}^n$. Temos que

$$\|g\| \leq \|f^{(n)} - g + f^{(n)}\| \leq \|f^{(n)} - g\| + \|f^{(n)}\|.$$

Seja $n \rightarrow \infty$. Como $\|f^{(n)}\| \leq r$, obtemos que

$$\|g\| \leq \|f^{(n)}\| \leq r,$$

que mostra que $g \in S_r$. Então S_r é um conjunto fechado.

■

Teorema 4 *Seja F um espaço linear normado. Sejam $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ elementos linearmente independentes de F e Ω_n o subespaço formado por eles. Então, para todo $f \in F$ existe um elemento da melhor aproximação de Ω_n em relação à distância, originada pela norma em F .*

Demonstração. Seja $\varphi \in \Omega_n$ tal que $\|\varphi\| > 2\|f\| =: r$. Então

$$\|f - \varphi\| \geq \|\varphi\| - \|f\| > 2\|f\| - \|f\| = \|f\| = \|f - 0\| \geq E_n(f).$$

Consequentemente,

$$\inf \{\|f - \varphi\| : \varphi \in \Omega_n\} = \inf \{\|f - \varphi\| : \|\varphi\| \leq r\} = \inf_{\varphi \in S_r} \|f - \varphi\|.$$

Por outro lado $\|f - \varphi\|$ é uma função contínua dos coeficientes $a_0, \dots, a_n$ de φ e S_r é um conjunto limitado e fechado. Pelo teorema de Weierstrass

$$\inf_{\varphi \in S_r} \|f - \varphi\| = \min_{\varphi \in S_r} \|f - \varphi\| = \|f - \varphi_f\|$$

para algum $\varphi_f \in \Omega_n$. ■

Definição 2 Dizemos que o espaço normado F é estritamente normado se a igualdade

$$\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$$

implica que os elementos f e g são linearmente dependentes.

Teorema 5 Se F é estritamente normado então, para todo $f \in F$, existe um único elemento da melhor aproximação de Ω_n .

Demonstração. Suponhamos o contrário. Então, existem $f \in F$ e elementos p e q de Ω_n , para os quais

$$\|f - p\| = \|f - q\| = E_n(f) := \inf \{\|f - \varphi\| : \varphi \in \Omega_n\}$$

e $p \neq q$. Por outro lado,

$$\left\|f - \frac{p+q}{2}\right\| = \frac{1}{2}\|(f-p) + (f-q)\| \leq \frac{1}{2}(\|f-p\| + \|f-q\|) = E_n(f). \quad (1.1.1)$$

Pela definição da melhor aproximação, temos $\|f - (p+q)/2\| \geq E_n(f)$. Então, em (1) temos somente igualdades. Em particular,

$$\|(f - p) + (f - q)\| = \|f - p\| + \|f - q\|.$$

Como F é estritamente normado, temos que $f - p = \alpha(f - q)$. Vamos analisar dois casos.

- Se $\alpha = 1$ essa igualdade implica que $p = q$. Contradição!
- Se $\alpha \neq 1$, temos $f = (p - \alpha q)/(1 - \alpha)$ e, conseqüentemente, $f \in \Omega_n$ o que implica que f é o único elemento que melhor aproxima ele mesmo(f), ou seja, $f=p=q$. Contradição novamente.

■

1.2 Aproximação em Espaços de Hilbert

1.2.1 Aproximação em Espaços de Hilbert com Dimensão Finita

O espaço linear H é chamado espaço de Hilbert se H é um espaço linear completo com *produto interno*, ou seja, para quaisquer dois elementos f, g de H definimos o produto interno $\langle f, g \rangle$ como sendo um número que satisfaz às seguintes condições

- 1) $\langle f, f \rangle \geq 0$, e $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$,
- 2) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$,
- 3) $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$.

Consideraremos somente o caso em que $\langle f, g \rangle$ é um número real.

Todo espaço de Hilbert pode ser normado pois nele pode ser introduzida uma norma da seguinte maneira

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (1.2.2)$$

Para verificar que (1.2.2) é realmente uma norma em H , provaremos algumas propriedades de produto interno.

Lema 1 (Desigualdade de Cauchy-Schwartz) *Para quaisquer dois elementos f e g do espaço de Hilbert H , vale a desigualdade*

$$| \langle f, g \rangle | \leq (\langle f, f \rangle)^{1/2} (\langle g, g \rangle)^{1/2},$$

onde a igualdade vale se, e somente se, f e g são linearmente dependentes.

Demonstração. Para todo número real λ temos

$$\langle f - \lambda g, f - \lambda g \rangle = \langle f, f \rangle - 2\lambda \langle f, g \rangle + \lambda^2 \langle g, g \rangle \geq 0.$$

Esta expressão é um polinômio do segundo grau em λ . Consequentemente, seu discriminante é não-positivo, isto é

$$[\langle f, g \rangle]^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle.$$

A desigualdade está provada.

Para provarmos a igualdade, tomemos $h = f - \lambda g$ onde $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\langle h, h \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle f - \lambda g, f - \lambda g \rangle = 0 \Leftrightarrow f - \lambda g = 0 \Leftrightarrow f = \lambda g.$$

Portanto, f e g são L.D. ■

Lema 2 (Desigualdade triangular) Para quaisquer f e g de H temos

$$\sqrt{\langle f + g, f + g \rangle} \leq \sqrt{\langle f, f \rangle} + \sqrt{\langle g, g \rangle}, \quad (1.2.3)$$

onde a igualdade vale se, e somente se, f e g são linearmente dependentes.

Demonstração. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz obtemos

$$\begin{aligned} \langle f + g, f + g \rangle &= \langle f, f \rangle + 2\langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle \\ &\leq \langle f, f \rangle + 2\sqrt{\langle f, f \rangle \langle g, g \rangle} + \langle g, g \rangle \\ &= \left\{ \sqrt{\langle f, f \rangle} + \sqrt{\langle g, g \rangle} \right\}^2, \end{aligned}$$

o que implica em (1.2.3). A igualdade é atingida se, e somente se,

$$[\langle f, g \rangle]^2 = \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle.$$

Mas, como já observamos, isto é verdade somente quando f e g são linearmente dependentes.

Corolário 2 *Se H é um espaço de Hilbert, então*

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

é uma norma em H .

Assim, a norma 1.2.2 gera a distância

$$\rho(f, g) := \|f - g\| = \sqrt{\langle f - g, f - g \rangle}.$$

Daqui por diante, quando falarmos em espaço de Hilbert, vamos admitir que este espaço é normado e métrico pelos resultados descrito acima.

Sejam $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ vetores arbitrários L.I. de H . Denotemos por

$$\Omega_n := \left\{ \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i : (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \right\}.$$

o espaço gerado por φ_i , $i = 0, 1, \dots, n$.

A quantidade

$$\|f - p\| = \inf \{ \|f - \varphi\| : \varphi \in \Omega_n \}$$

é chamada de *Melhor Aproximação de f por elementos de Ω_n* . Se existe um elemento φ_* de Ω_n para o qual a igualdade acima é atingida, este elemento é chamado de *elemento da melhor aproximação de f* .

Dizemos que f é *ortogonal* a g e escrevemos $f \perp g$, se $\langle f, g \rangle = 0$.

Teorema 6 *Sejam H um espaço de Hilbert e $f \in H$. O elemento p de Ω_n é o elemento de melhor aproximação para f por elementos de Ω_n se, e somente se,*

$$\langle f - p, \varphi \rangle = 0 \quad \text{para todo } \varphi \text{ de } \Omega_n. \quad (1.2.4)$$

Demonstração. Vamos supor que p é o elemento da melhor aproximação, isto é,

$$\|f - p\| = \inf \{ \|f - \varphi\| : \varphi \in \Omega_n \} := \varepsilon_n(f).$$

Então, para qualquer $\varphi \in \Omega_n$ e $\varphi \neq 0$, a função

$$\begin{aligned}
r(\lambda) &:= \|f - p + \lambda\varphi\|^2 = \langle f - p + \lambda\varphi, f - p + \lambda\varphi \rangle \\
&= \varepsilon_n^2(f) + 2\lambda \langle f - p, \varphi \rangle + \lambda^2 \langle \varphi, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

tem ponto de mínimo para $\lambda = 0$. Isto implica em $r'(0) = 0$. Mas $r'(0) = 2 \langle f - p, \varphi \rangle$. Consequentemente, $\langle f - p, \varphi \rangle = 0$ para todo $\varphi \in \Omega_n$.

Reciprocamente, vamos supor que $p \in \Omega_n$ satisfaz às condições de ortogonalidade (1.2.4). Seja φ qualquer outro elemento de Ω_n . Então, $\delta := p - \varphi \in \Omega_n$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
\|f - \varphi\|^2 &= \|f - p + p - \varphi\|^2 = \langle f - p + \delta, f - p + \delta \rangle \\
&= \|f - p\|^2 + 2 \langle f - p, \delta \rangle + \|\delta\|^2 \\
&= \|f - p\|^2 + \|\delta\|^2 \quad (\text{pois } (f - p) \perp \delta) \\
&\geq \|f - p\|^2.
\end{aligned}$$

Aqui, se p satisfaz (1.2.4), então

$$\|f - p\| \leq \|f - \varphi\| \quad \text{para todo } \varphi \in \Omega_n.$$

Além disso, a igualdade é atingida somente para $\delta = 0$, isto é, para $\varphi = p$. ■

Agora, construiremos o elemento de melhor aproximação de f usando a caracterização (1.2.4). Procuraremos p da forma

$$p = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n.$$

Desde que $(f - p) \perp \varphi_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$, então os coeficientes $\{a_i\}$ satisfazem às condições

$$\begin{array}{ccccccc}
a_0 \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & + & a_1 \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle & + \dots + & a_n \langle \varphi_n, \varphi_0 \rangle & = & \langle f, \varphi_0 \rangle \\
a_0 \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle & + & a_1 \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & + \dots + & a_n \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle & = & \langle f, \varphi_1 \rangle \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_0 \langle \varphi_0, \varphi_n \rangle & + & a_1 \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle & + \dots + & a_n \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle & = & \langle f, \varphi_n \rangle
\end{array} \tag{1.2.5}$$

que é um sistema linear de $n + 1$ equações com $n + 1$ incógnitas. Denotemos por $D(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ o seu determinante,

$$D(\varphi_0, \dots, \varphi_n) := \det \begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle & \dots & \langle \varphi_n, \varphi_0 \rangle \\ \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \dots & \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_0, \varphi_n \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle & \dots & \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Este é o determinante de Gram, que é diferente de zero pois $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ são linearmente independentes. Consequentemente, o sistema (1.2.5) tem uma única solução $a_0, \dots, a_n$. Então, o cálculo do elemento de melhor aproximação em um espaço de Hilbert se reduz à solução do sistema (1.2.5).

A solução do sistema (1.2.5) pode ser facilitada se a base $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ é ortogonal. Sabemos que em todo espaço linear existe uma base ortogonal, então suponhamos que $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ seja esta base, isto é, $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0$ para $i \neq j$. Então, (1.2.5) se reduz à forma

$$a_k \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = \langle f, \varphi_k \rangle, \quad k = 0, \dots, n,$$

de onde obtemos

$$a_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle}, \quad k = 0, \dots, n. \quad (1.2.6)$$

Assim provamos o seguinte teorema.

Teorema 7 *Seja $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ um sistema ortogonal. Então, o elemento p de melhor aproximação de $f \in H$ por elementos de Ω_n é dado pela fórmula*

$$p = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle} \varphi_k.$$

Vamos obter uma expressão para o erro $\varepsilon_n(f) = \|f - p\|$. Temos que

$$\varepsilon_n^2(f) = \langle f - p, f - p \rangle = \langle f, f \rangle - \langle p, f \rangle$$

onde $(f - p) \perp p$.

Por esta igualdade, representando p da forma $p = a_0\varphi_0 + \dots + a_n\varphi_n$, obtemos a relação

$$a_0 \langle \varphi_0, f \rangle + a_1 \langle \varphi_1, f \rangle + \dots + a_n \langle \varphi_n, f \rangle = \langle f, f \rangle - \varepsilon_n^2(f).$$

Usando esta relação junto com o sistema (1.2.5) formamos um sistema homogêneo de $n+2$ equações lineares com relação a $(a_0, a_1, \dots, a_n, 1)$. Desde que este sistema tem solução não-nula, seu determinante é igual a zero, isto é,

$$\det \begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \dots & \langle \varphi_n, \varphi_0 \rangle & \langle f, \varphi_0 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \varphi_0, \varphi_n \rangle & \dots & \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle & \langle f, \varphi_n \rangle \\ \langle \varphi_0, f \rangle & \dots & \langle \varphi_n, f \rangle & \langle f, f \rangle - \varepsilon_n^2(f) \end{bmatrix} = 0.$$

Por esta igualdade, determinamos $\varepsilon_n^2(f)$

$$\varepsilon_n^2(f) = \frac{D(f, \varphi_0, \dots, \varphi_n)}{D(\varphi_0, \dots, \varphi_n)}. \quad (1.2.7)$$

Então, provamos a igualdade

$$\min_{\{a_k\}_0^n} \left\| f - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k \right\|^2 = \frac{D(f, \varphi_0, \dots, \varphi_n)}{D(\varphi_0, \dots, \varphi_n)}.$$

Esta fórmula vale para qualquer escolha da base $\varphi_0, \dots, \varphi_n$. Se $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ é um *sistema ortonormal*, isto é, se $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0$ para $i \neq j$ e $\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle = 1$ para $i = 0, \dots, n$, obtemos diretamente

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^2(f) &= \langle f - p, f - p \rangle = \langle f, f \rangle - \langle p, f \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - \sum_{k=0}^n a_k \langle \varphi_k, f \rangle \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n a_k^2 \end{aligned}$$

pois, de acordo com (1.2.6), $a_k = \langle \varphi_k, f \rangle$.

Desde que $\varepsilon_n^2(f) > 0$ para $f \notin \Omega_n$, isto implica na *desigualdade de Bessel*:

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k^2 \right)^{1/2} \leq \|f\|.$$

Observação: Por (1.2.7) e sabendo que $D(g_1) = \langle g_1, g_1 \rangle > 0$ para todo $g_1 \neq 0$, segue por indução, que o determinante de Gram, $D(g_1, \dots, g_n)$, é estritamente positivo se os elementos $g_1, \dots, g_n$ são linearmente independentes.

Casos Particulares

I. Aproximações em L_2 .

Seja $[a, b]$ um dado intervalo, finito ou infinito. Seja $\mu(x)$ uma função peso integrável em $[a, b]$. Denotamos por $L_2[a, b]$ o espaço de todas as funções definidas em $[a, b]$, para as quais

$$\int_a^b f^2(x) \mu(x) dx < \infty.$$

É claro que $L_2[a, b]$ é um espaço linear. Definiremos o produto interno neste espaço da seguinte maneira

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)\mu(x) dx.$$

Não é difícil mostrar que o produto dado por esta definição satisfaz a todas as exigências de produto interno. Assim, $L_2[a, b]$ torna-se um espaço de Hilbert. A norma

$$\|f\| := \left\{ \int_a^b f^2(x) \mu(x) dx \right\}^{1/2}$$

é chamada *média quadrática*. Ela gera a distância *média quadrática*

$$\rho(f, g) := \left\{ \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \mu(x) dx \right\}^{1/2}.$$

Sejam $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$ funções arbitrárias e linearmente independentes do espaço $L_2[a, b]$. Particularmente, $\{\varphi_i\}$ podem ser polinômios algébricos $1, x, x^2, \dots, x^n$. Então, em $L_2[a, b]$ podemos considerar o problema de *aproximação média quadrática* de uma dada função $f \in L_2[a, b]$ por *polinômios generalizados* $a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)$.

De acordo com a teoria geral de aproximação em espaços de Hilbert, vale o seguinte teorema

Teorema 8 Para toda função f de $L_2[a, b]$ existe um único polinômio

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x),$$

para o qual

$$\int_a^b [f(x) - p(x)]^2 \mu(x) dx = \min_{\{a_k\}_{k=0}^n} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) \right]^2 \mu(x) dx.$$

Além disso, se $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ é um sistema ortonormal,

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \left[\int_a^b f(t) \varphi_k(t) \mu(t) dt \right] \varphi_k(x). \quad (1.2.8)$$

II. Método dos Mínimos Quadrados.

Na prática, frequentemente precisamos resolver o seguinte problema.

Vamos supor que sabemos, por razões teóricas, que a função f é de uma determinada forma que depende de n parâmetros $a_1, \dots, a_n$. Por exemplo, f pode ser da forma

$$\sum_{k=1}^n a_k x^{k-1}, \quad \prod_{k=1}^n \sin a_k x \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^n e^{a_k x}.$$

Podemos calcular os valores de f com uma determinada precisão em um número finito de pontos. Além disso, o cálculo do valor de f em um ponto pode ser feito por um processo caro. O objetivo é recuperar aproximadamente os parâmetros $a_1, \dots, a_n$ com a maior precisão possível com base na informação

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m), \quad m > n.$$

Em geral, estes números são aproximações dos valores exatos da função f . Por exemplo, vamos supor que a relação $y = f(x)$ que investigamos é linear, isto é,

$$f(x) = Ax + B,$$

para algum A e B . Temos, à disposição, os valores de $f(x)$ obtidos experimentalmente

$$f_i = f(x_i), i = 1, \dots, m.$$

Devido à falta de precisão no processo de medição ou a imperfeição do experimento, os pontos (x_i, f_i) , $i = 1, \dots, m$, obviamente não pertencem a uma reta. Sabemos que a função $f(x)$ é linear. Então, qual a reta que representa os dados obtidos experimentalmente? Existem os candidatos para tais representantes. Por exemplo, podemos escolher quaisquer dois pontos $(x_i, f_i), (x_j, f_j)$ da tabela e considerar a reta que passa por eles como aproximação de f . Esta seria uma escolha aleatória.

Vamos tentar abordar o problema de forma mais teórica e sistemática. Procuremos uma função da forma

$$l(x) = Ax + B.$$

Denotaremos por d_i a discrepância entre o valor f_i no ponto x_i obtido experimentalmente e o valor de l no mesmo ponto,

$$d_i := f_i - (Ax_i + B), \quad i = 1, \dots, m.$$

Existem algumas abordagens de como escolher os parâmetros A e B de l .

1) Escolher A e B de modo que

$$\max_{1 \leq i \leq m} |d_i|$$

seja o mínimo possível. Assim, tentar minimizar a maior distância entre f e l nos pontos $x_1, \dots, x_m$. Tal critério é aceitável, mas a realização na prática é difícil porque o problema é não-linear pois $\max_i |d_i|$ é uma função não-linear nas variáveis A e B .

2) Escolher A e B de modo que

$$\sum_{i=1}^m |d_i|$$

seja o mínimo possível. As objeções contra o critério 1) valem com a mesma força neste caso. Estas objeções foram consideradas seriamente no passado

quando não existiam ferramentas para cálculos rápidos. Talvez, por isto, foi escolhido um critério que leva a um sistema linear para a obtenção dos parâmetros.

3) Escolher A e B de modo que

$$S(A, B) := \sum_{i=1}^n d_i^2$$

seja o mínimo possível. Temos

$$S(A, B) = \sum_{i=1}^m [f_i - (Ax_i + B)]^2,$$

e as condições necessárias para o mínimo, que neste caso também são suficientes, levam ao sistema

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m [f_i - (Ax_i + B)]x_i = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m [f_i - (Ax_i + B)] = 0.$$

Esta abordagem para determinar as incógnitas da função pela tabela dos dados é chamada *método dos mínimos quadrados*. Vamos representá-lo de forma mais geral.

Seja $\{F(x, a_1, \dots, a_n)\}$ uma família de funções descritas pelos parâmetros $a_i \in I_i$, $i = 1, \dots, n$. Sejam $f_1, \dots, f_m$ os valores de uma função desta família nos pontos $x_1, \dots, x_m$.

Definição 3 Dizemos que $F(x, a_1, \dots, a_n)$ é a aproximação dos dados $f_1, \dots, f_m$ pelo método dos mínimos quadrados se $a_1, \dots, a_n$ minimizam a expressão

$$\sum_{i=1}^m \mu_i [F(x_i, a_1, \dots, a_n) - f_i]^2,$$

onde $\{\mu_i\}_i^m$ são números positivos dados a priori, chamados "pesos".

Consideremos uma situação particular, onde conhecemos a aproximação de uma função por polinômios algébricos de grau n nos pontos $x_1 < \dots < x_m$ ($m > n$). Então, queremos achar a aproximação

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

de f pelo método dos mínimos quadrados baseada nos valores $f_i = f(x_i)$, $i = 1, \dots, m$. Sejam $\{\mu_i\}$ alguns pesos dados. Então, de acordo com o que foi dito, $a_0, a_1, \dots, a_n$ são determinados de tal maneira que minimizam a expressão

$$\Phi(a_0, \dots, a_n) := \sum_{i=1}^m \mu_i \left[f_i - \sum_{k=0}^n a_k x_i^k \right]^2.$$

Vemos que $\Phi^2(a_0, \dots, a_n)$ é de fato a distância entre f e p no espaço de Hilbert H das funções definidas em $x_1, \dots, x_m$ e equipado com o produto interno

$$\langle f, g \rangle := \sum_{i=1}^m \mu_i f(x_i) g(x_i).$$

De fato, este produto interno gera a norma

$$\|f\| := \left\{ \sum_{i=1}^m \mu_i f^2(x_i) \right\}^{1/2},$$

que, por outro lado, gera a distância

$$\rho(f, g) = \left\{ \sum_{i=1}^m \mu_i [f(x_i) - g(x_i)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Nestes termos, a função $\Phi(a_0, \dots, a_n)$ é igual à distância entre f e p . Consequentemente, o método dos mínimos quadrados leva ao problema de melhor aproximação por polinômios algébricos no espaço de Hilbert H . A teoria geral implica que a solução $a_0, \dots, a_n$ é determinada pelo sistema linear (1.2.5) que, neste caso, toma a forma

$$a_0 \sum_{i=1}^m x_i^k + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^{k+1} + \dots + a_n \sum_{i=1}^m x_i^{k+n} = \sum_{i=1}^m f(x_i) x_i^k, \quad k = 0, \dots, n.$$

Para evitar a solução deste sistema, podemos escolher, a priori, uma base apropriada no espaço de polinômios algébricos π_n . Por exemplo, se procurássemos um polinômio p da forma

$$p(x) = b_0 P_0(x) + \cdots + b_n P_n(x),$$

onde os polinômios $\{P_k(x)\}$ formam um sistema ortogonal no conjunto dos pontos $x_1, \dots, x_m$ com pesos $\{\mu_i\}$, o sistema anterior se reduzirá ao sistema diagonal

$$b_k \sum_{i=1}^n \mu_i P_k^2(x_i) = \sum_{i=1}^n \mu_i P_k(x_i) f(x_i),$$

onde os coeficientes b_k seriam determinados imediatamente.

1.2.2 Teorema de Pitágoras e Teorema de Bessel

Lema 3 *Seja H um espaço de Hilbert e sejam $f_1, f_2, \dots, f_n$ um número finito de vetores ortogonais de H . Então, para $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$, temos*

$$\|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \cdots + \|f_n\|^2.$$

Definição 4 *Seja $A \subset H$. Definimos o complemento ortogonal de A , como sendo o conjunto*

$$A^\perp = \{x \in H : \langle x, a \rangle = 0, \forall a \in A\}.$$

Lema 4 *O produto interno em um espaço de Hilbert H é uma função contínua das suas variáveis.*

Lema 5 *Para qualquer $A \subset H$ o espaço $A^\perp$ é subespaço linear fechado de H .*

Teorema 9 (Teorema de Pitágoras) *A série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k, \tag{1.2.9}$$

onde $\langle f_i, f_j \rangle = 0$, para $i \neq j$, é convergente se e somente se a série $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2$ é convergente.

Quando (1.2.9) é convergente temos que $\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2$.

Demonstração. Sejam $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ e $\sigma_n = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 + \cdots + \|f_n\|^2$ as somas parciais das séries $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2$, respectivamente. Então, em virtude da ortogonalidade, para qualquer $m < n$,

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\|^2 &= \|f_{m+1} + f_{m+2} + \cdots + f_n\|^2 \\ &= \|f_{m+1}\|^2 + \|f_{m+2}\|^2 + \cdots + \|f_n\|^2 \\ &= \sigma_n - \sigma_m. \end{aligned}$$

Então $\{s_n\}$ é de Cauchy em H se e somente se $\{\sigma_n\}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Como H e $\mathbb{R}$ são completos, segue a primeira demonstração.

Como a série (1.2.9) converge, temos que a sequência $\{s_n\}$ de suas somas parciais converge. Do mesmo modo, a sequência das somas parciais da série $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2$ é convergente. Assim,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|^2 &= \langle f_1 + \cdots + f_n, f_1 + \cdots + f_n \rangle \\ &= \|f_1\|^2 + \cdots + \|f_n\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \|f_k\|^2. \end{aligned}$$

Aplicando o limite para $n \rightarrow \infty$ em ambos os lados da igualdade, uma vez que a norma é uma função contínua, teremos

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2.$$

■

Teorema 10 (Teorema de Bessel) *Seja H um espaço de Hilbert e seja $B = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ um sistema ortonormal em H . Então para qualquer $f \in H$*

- (i) $\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle f_i$ é convergente,
- (ii) $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq \|f\|^2$.

Demonstração. Primeiramente mostraremos (ii). Seja $f \in H$, assim podemos definir $g \in Y_n = \text{Span}\{f_1, \dots, f_n\}$ tal que

$$g = \sum_{k=1}^n \langle f, f_k \rangle f_k,$$

onde n é fixo, e então definimos $h = f - g$, uma vez que o espaço de Hilbert H pode ser escrito como soma direta de qualquer subespaço fechado de H e seu complemento ortogonal. Mostremos que h é ortogonal a g .

Para todo $g \in Y_n$ é uma combinação linear

$$g = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k,$$

onde $\alpha_k = \langle g, f_k \rangle$. Para a escolha particular $\alpha_k = \langle f, f_k \rangle$, $k = 1, 2, \dots, n$, obtemos g tal que $h = f - g \perp g$.

Para provar isto, notemos que, pela ortonormalidade,

$$\|g\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^n \langle f, f_k \rangle f_k, \sum_{k=1}^n \langle f, f_k \rangle f_k \right\rangle = \sum |\langle f, f_k \rangle|^2. \quad (1.2.10)$$

Desta forma, podemos mostrar que $h \perp g$

$$\begin{aligned} \langle h, g \rangle &= \langle f - g, g \rangle \\ &= \langle f, g \rangle - \langle g, g \rangle \\ &= \left\langle f, \sum_{k=1}^n \langle f, f_k \rangle f_k \right\rangle - \|g\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \langle f, f_k \rangle \overline{\langle f, f_k \rangle} - \sum_{k=1}^n |\langle f, f_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

Portanto

$$\langle h, g \rangle = 0 \quad (1.2.11)$$

Pela relação de Pitágoras, temos

$$\|f\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2. \quad (1.2.12)$$

Por (1.2.10), segue que

$$\|h\|^2 = \|f\|^2 - \|g\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle f, f_k \rangle|^2.$$

Como $\|h\| \geq 0$, temos para todo $n = 1, 2, \dots$

$$\sum_{k=1}^n |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2. \quad (1.2.13)$$

Faremos agora, a demonstração de (i). Sabemos que a série $\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k$ é convergente se e somente se a série $\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2$ é convergente. De fato, sejam

$$s_n = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n \quad \text{e} \quad \sigma_n = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2,$$

as somas parciais das séries acima, respectivamente. Assim,

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sigma_n - \sigma_m.$$

Logo s_n é de Cauchy em H se e somente se σ_n é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Como H e $\mathbb{R}$ são completos, s_n é convergente se e somente se σ_n é convergente.

Da desigualdade de Bessel (1.2.13) temos que

$$\sum_{k=1}^n |\langle f, f_k \rangle|^2$$

converge, pois é crescente e limitada. Portanto, $\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle f_i$ é convergente. ■

Definição 5 Um sistema ortogonal B do espaço de Hilbert H é base de H se $B^\perp = \{0\}$.

Teorema 11 Seja H um espaço de Hilbert e $B = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma base de H . Para qualquer $f \in H$ a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle f_i$$

é convergente. Além disso,

$$(i) \quad \mathbf{f} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_i \rangle \mathbf{f}_i,$$

$$(ii) \quad \|\mathbf{f}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_i \rangle|^2.$$

Trabalharemos, a partir de agora, no espaço de Hilbert $L_2[-\pi, \pi]$, cuja norma é definida por

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2},$$

onde

$$L_2[-\pi, \pi] = \{f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \|f\|_2 < \infty\},$$

para o qual valem todas as propriedades acima citadas.

Capítulo 2

Séries de Fourier

2.1 Definições e Exemplos

2.1.1 Definições

Definição 6 Uma sequência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ é ortogonal, se o produto interno

$$\langle x_n, x_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \alpha \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

para $m, n \in \mathbb{N}$.

Quando $\langle x_n, x_n \rangle = 1$ temos que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência ortonormal.

Seja

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx. \quad (2.1.1)$$

Usando as identidades trigonométricas

$$\cos(m \pm n) = \cos m \cos n \mp \sin m \sin n, \quad (2.1.2)$$

obtemos

$$\cos m \cos n = \frac{\cos(m+n) + \cos(m-n)}{2}. \quad (2.1.3)$$

Assim

$$I_1 = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(m+n)x] dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(m-n)x] dx \right\}.$$

- Se $m = n = 0$

$$I_1 = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi} dx \right\} = 2\pi$$

- Se $m = n \neq 0$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2mx dx + \int_{-\pi}^{\pi} dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin 2mx}{2m} \Big|_{-\pi}^{\pi} + 2\pi \right\} \\ &= \pi \end{aligned}$$

- Se $m \neq n \neq 0$

$$I_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right\} = 0.$$

Portanto

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \pi, & \text{se } m = n \neq 0, \\ 2\pi, & \text{se } m = n = 0. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Tomemos, agora

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx. \quad (2.1.5)$$

Usando as identidades trigonométricas

$$\sin(m \pm n) = \sin m \cos n \pm \sin n \cos m, \quad (2.1.6)$$

obtemos

$$\sin n \cos m = \frac{\sin(m+n) + \sin(m-n)}{2}. \quad (2.1.7)$$

Substituindo a última igualdade em (2.1.5) e seguindo raciocínio análogo ao da resolução de I_1 , obtemos

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \pi, & \text{se } m = n \neq 0, \\ 2\pi, & \text{se } m = n = 0. \end{cases} \quad (2.1.8)$$

Seja

$$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx. \quad (2.1.9)$$

Usando as identidades trigonométricas (2.1.2)

$$\sin m \sin n = \frac{\cos(m-n) - \cos(m+n)}{2},$$

substituindo esta última igualdade em (2.1.9), teremos

- Se $m = n = 0$

$$I_3 = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} dx - \int_{-\pi}^{\pi} dx \right\} = 0,$$

- Se $m = n \neq 0$

$$I_3 = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2mx dx \right\} = \pi,$$

- Se $m \neq n \neq 0$

$$I_3 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right\} = 0.$$

Portanto

$$I_3 = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \pi, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (2.1.10)$$

Podemos observar então que a sequência

$$\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos kx, \sin kx, \dots\}$$

é ortogonal.

Tomemos o espaço de Hilbert $L_2[-\pi, \pi]$ e a sua norma definida por

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \right)^{1/2} \quad (2.1.11)$$

que é gerada pelo produto interno definido por

$$\langle x_n, x_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Note que

$$\|1\|_2 = \sqrt{2\pi}$$

$$\|\cos kx\|_2 = \|\sin kx\|_2 = \sqrt{\pi}.$$

Logo a sequência

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

é ortonormal.

Consideremos no espaço $\mathbb{R}^3$ o sistema ortonormal de coordenadas e o vetor f . Então podemos escrever

$$f = f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3.$$

Aplicando o produto interno com e_k , teremos

$$f = \langle f, e_1 \rangle e_1 + \langle f, e_2 \rangle e_2 + \langle f, e_3 \rangle e_3.$$

Tomemos $f(x) \in L_2[-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \left\langle f, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} + \left\langle f, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} + \dots \\ &+ \left\langle f, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \left\langle f, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} + \dots \end{aligned}$$

Ou seja

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{\cos x}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t dt + \frac{\sin x}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t dt + \dots$$

$$\frac{\cos kx}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k t dt + \frac{\sin kx}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin k t dt + \dots$$

O que podemos denotar por

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \text{onde}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k t dt \quad k = 0, 1, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin k t dt \quad k = 1, 2, \dots$$

Esta forma é chamada de expansão da Série de Fourier de $f(x)$.

2.1.2 Exemplos

Vamos escrever a Série de Fourier de algumas funções.

Exemplo 1 $f(x) = \cos^2 x$.

Resolução: Usando as identidades trigonométricas:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \quad e \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

temos que

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}.$$

■

Observações

- Se a função $f(x)$ é ímpar, como a função cosseno é par, os coeficientes a_k da série de Fourier de $f(x)$ serão nulos.
- Se a função $f(x)$ é par, como a função seno é ímpar os coeficientes b_k da série de Fourier de $f(x)$ serão nulos.

Exemplo 2 $f(x) = x$.

Resolução: Temos que

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin ktdt.$$

Fazendo a integração por partes ($t = u$ e $\sin ktdt = dv$)

$$b_k = \frac{-1}{\pi} \left\{ \frac{\pi \cos k\pi}{k} + \frac{\pi \cos k(-\pi)}{k} \right\} = \frac{-2 \cos k\pi}{k}$$

como $\cos k\pi = (-1)^k$

$$b_k = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Pelas observações feitas anteriormente

$$a_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Assim

$$x \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx.$$

■

Exemplo 3 $f(x) = x^2$.

Resolução: Temos que

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos ktdt, \quad k = 0, 1, \dots$$

Para $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Para $k = 1, 2, \dots$ fazendo integração por partes ($t^2 = u$ e $\cos ktdt = dv$)

$$a_k = \frac{-2}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin ktdt,$$

pelos cálculos já efetuados no exemplo 2

$$a_k = \frac{4(-1)^k}{k^2}.$$

Assim

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx.$$

■

Observe que

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \sim \frac{-\pi^2}{12},$$

$$x = \pi \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{\pi^2}{6}.$$

Exemplo 4 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}}.$

Resolução: Temos que

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^t + e^{-t}}{e^\pi - e^{-\pi}} \sin kt dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

ou seja,

$$b_k = \frac{1}{\pi(e^\pi - e^{-\pi})} \left\{ \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin kt dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-t} \sin kt dt}_{I_2} \right\}.$$

Integrando I_1 por partes ($e^t = u$ e $\sin kt dt = dv$)

$$I_1 = \frac{\cos k\pi (e^{-\pi} - e^\pi)}{k} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos kt dt$$

fazendo a integração por partes ($e^t = u$ e $\cos kt dt = dv$)

$$I_1 = \frac{\cos k\pi}{k} (e^{-\pi} - e^\pi) - \frac{1}{k^2} I_1.$$

Como $\cos kt = (-1)^k$

$$I_1 = \frac{k(-1)^k (e^{-\pi} - e^\pi)}{k^2 + 1}.$$

Integrando I_2 por partes ($e^{-t} = u$ e $\sin kt dt = dv$)

$$I_2 = \frac{\cos k\pi (e^\pi - e^{-\pi})}{k} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-t} \cos kt dt,$$

fazendo $e^{-t} = u$ e $\cos kt dt = dv$

$$I_2 = \frac{\cos k\pi (e^\pi - e^{-\pi})}{k} - \frac{1}{k^2} I_2,$$

assim

$$I_2 = \frac{k(-1)^k (e^\pi - e^{-\pi})}{k^2 + 1}.$$

Portanto $b_k = 0$ para $k = 1, 2, \dots$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^t + e^{-t}}{e^\pi - e^{-\pi}} \cos kt dt, \quad k = 0, 1, \dots$$

Para $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi(e^\pi - e^{-\pi})} \int_{-\pi}^{\pi} (e^t + e^{-t}) dt = \frac{2}{\pi},$$

Para $k = 1, 2, \dots$

$$a_k = \frac{1}{\pi(e^\pi - e^{-\pi})} \left\{ \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos kt \, dt}_{I_3} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-t} \cos kt \, dt}_{I_4} \right\}$$

Integrando I_3 por partes ($e^t = u$ e $\cos ktdt = dv$)

$$I_3 = \frac{-1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin ktdt$$

fazendo $e^t = u$ e $\sin ktdt = dv$

$$I_3 = \frac{-1}{k} \left\{ \frac{\cos k\pi (e^{-\pi} - e^\pi)}{k} + \frac{1}{k} I_3 \right\},$$

assim

$$I_3 = \frac{(-1)^k}{k^2 + 1} (e^\pi - e^{-\pi}).$$

Integrando I_4 por partes ($e^{-t} = u$ e $\cos ktdt = dv$)

$$I_4 = \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-t} \sin ktdt$$

fazendo $e^{-t} = u$ e $\sin ktdt = dv$

$$I_4 = \frac{1}{k} \left\{ -\frac{\cos k\pi (e^{-\pi} - e^\pi)}{k} - \frac{1}{k} I_4 \right\},$$

assim

$$I_4 = \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 + 1} (e^{-\pi} - e^\pi).$$

Logo

$$a_k = \frac{2(-1)^k}{\pi(k^2 + 1)}.$$

Assim

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + 1} \cos kx.$$

■

Note que se $x = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + 1} \sim \frac{\pi}{(e^{\pi} - e^{-\pi})} - \frac{1}{2}.$$

Exemplo 5 $f(x) = \frac{1}{8}\pi x(\pi - x)$.

Resolução: Temos que

$$a_k = \frac{1}{8} \int_{-\pi}^{\pi} t(\pi - t) \cos ktdt \quad k = 0, 1, \dots$$

Para $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{8} \int_{-\pi}^{\pi} (t\pi - t^2) dt = -\frac{\pi^3}{12},$$

Para $k = 1, 2, \dots$

$$a_k = \frac{1}{8} \left\{ \pi \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} t \cos ktdt}_{I_1} - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos ktdt}_{I_2} \right\}.$$

As integrais I_1 e I_2 já foram calculadas nos exemplos (2) e (3) respectivamente, assim

$$a_k = \frac{\pi(-1)^{k+1}}{2k^2},$$

$$b_k = \frac{1}{8} \int_{-\pi}^{\pi} t(\pi - t) \sin ktdt \quad k = 1, 2, \dots,$$

obviamente

$$b_k = \frac{1}{8} \left\{ \pi \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} t(\pi - t) \sin ktdt}_{I_3} - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin ktdt}_{I_4} \right\}.$$

Por cálculos já efetuados

$$b_k = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 (-1)^{k+1}}{k}.$$

Portanto

$$f(x) \sim \frac{-\pi^3}{24} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\pi (-1)^{k+1}}{2k^2} \cos kx + \frac{\pi^2}{4k} (-1)^{k+1} \sin kx \right],$$

ou ainda

$$f(x) \sim \frac{-\pi^3}{24} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left\{ \frac{\cos kx}{k} + \frac{\pi}{2} \sin kx \right\}.$$

■

Se $x = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \sim \frac{\pi^2}{12}.$$

Exemplo 6 $f(x) = \frac{1}{8} \pi (\pi - 2x)$

Resolução: Temos que

$$a_k = \frac{1}{8} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \cos ktdt - 2 \int_{-\pi}^{\pi} t \cos ktdt \right\} \quad k = 0, 1, \dots$$

Para $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{8} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} dt - 2 \int_{-\pi}^{\pi} t dt \right\} = \frac{\pi^2}{4},$$

Para $k = 1, 2, \dots$

$$a_k = \frac{1}{8} \left\{ \pi \int_{-\pi}^{\pi} \cos ktdt - 2 \int_{-\pi}^{\pi} t \cos ktdt \right\} = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{8} \left\{ \underbrace{\pi \int_{-\pi}^{\pi} \sin ktdt}_{I_1} - 2 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} t \sin ktdt}_{I_2} \right\}.$$

$I_1 = 0$ e pelos cálculos já efetuados no exemplo (3), temos que

$$I_2 = \frac{4\pi(-1)^k}{k}.$$

Portanto

$$b_k = \frac{\pi(-1)^k}{2k}.$$

Assim

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin kx.$$

■

Observe que se $x = \frac{\pi}{2}$, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{k} \sim -\frac{\pi}{2}.$$

Exemplo 7 $f(x) = \frac{\pi}{96}(\pi - 2x)(\pi^2 + 2x\pi - 2x^2).$

Resolução: Note que

$$f(x) = \frac{\pi}{96} (\pi^3 - 6x^2\pi + 4x^3)$$

$$a_k = \frac{1}{96} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^3 - 6\pi x^2 + 4t^3) \cos ktdt, \quad k = 0, 1, \dots$$

Para $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{96} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^3 - 6\pi x^2 + 4t^3) ktdt = -\frac{\pi^4}{48}.$$

Para $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\pi^3}{96} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos ktdt}_{I_1} - \frac{6\pi}{96} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos ktdt}_{I_2} \\ &\quad + \frac{4}{96} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} t^3 \cos ktdt}_{I_3}, \end{aligned}$$

temos $I_1 = I_3 = 0$ pois a função t^3 é ímpar, I_2 já foi calculada no exemplo (4), portanto

$$a_k = \frac{\pi^2(-1)^{k+1}}{4k^2},$$

$$b_k = \frac{\pi^3}{96} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin ktdt}_{I_1} - \frac{\pi}{16} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin ktdt}_{I_2} + \frac{4}{96} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} t^3 \sin ktdt}_{I_3}.$$

Note que $I_1 = I_2 = 0$.

Fazendo em I_3 ($t^3 = u$ e $\sin ktdt = dv$)

$$I_3 = \left\{ \frac{-2\pi^3 \cos k\pi}{k} + \frac{3}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ktdt \right\},$$

assim

$$b_k = \frac{\pi(-1)^k(6 - k^2\pi^2)}{12k^3}.$$

Portanto

$$f(x) \sim -\frac{\pi^4}{96} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^2(-1)^{k+1}}{4k^2} \cos kx + \frac{\pi(-1)^k(6 - k^2\pi^2)}{12k^3} \sin kx.$$

■

Observe que se $x = \frac{\pi}{2}$, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(6 - k^2\pi^2)}{k^3} \sim \frac{\pi^3}{8}.$$

2.2 Convergência da Série de Fourier em $L_2[-\pi, \pi]$

Para mostrarmos que a série de Fourier converge em $L_2[-\pi, \pi]$ provaremos primeiramente o seguinte teorema.

Teorema 12 *O sistema trigonométrico é base em $L_2[-\pi, \pi]$.*

Demonstração. Temos que mostrar que se

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

então $f(t) = 0$ em quase todo ponto do intervalo $(-\pi, \pi)$, com respeito à integral de Lebesgue, ou seja, a medida dos pontos t , onde $f(t) \neq 0$, é nula ($\mu = 0$).

Lembre-se que um conjunto $G \subset (a, b)$ tem medida zero ($\mu(G) = 0$) se para qualquer $\epsilon > 0$, existe um número enumerável de intervalos $U_1, \dots, U_n, \dots$, tais que $U_i =]\alpha_i, \beta_i[$, $i = 1, 2, \dots$, onde $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \supset G$ e além disso

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i - \alpha_i) < \epsilon.$$

1) Seja τ_n o espaço dos polinômios trigonométricos e seja $h_n \in \tau_n$, onde

$$h_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Consequentemente,

$$\langle f, h_n \rangle = \frac{a_0}{2} \langle f, 1 \rangle + \sum_{k=1}^n (a_k \langle f, \cos kx \rangle + b_k \langle f, \sin kx \rangle) = 0,$$

pois, por hipótese,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

2) Seja $g_1(t) \in C[-\pi, \pi]$ tal que $g_1(-\pi) = g_1(\pi)$. Pelo teorema de Weirstrass, se $g_1(t)$ satisfaz as exigências apresentadas acima, então, $\forall \epsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ e $h_n(t) \in \tau_n$ tal que $\|g_1(t) - h_n(t)\|_{\infty} < \epsilon$, onde $\|F\|_{\infty} = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |F(x)|$.

Assim, dado $\epsilon > 0$, escrevendo $g_1(t) = g_1(t) - h_n(t) + h_n(t)$ e usando a desigualdade triangular chegamos que

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g_1(t) dt \right| \leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) h_n(t) dt \right| + \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (g_1(t) - h_n(t)) dt \right|.$$

Do item anterior, temos que $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)h_n(t)dt = 0$. Logo,

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g_1(t)dt \right| \leq \|g_1(t) - h_n(t)\|_{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt \leq \epsilon \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt.$$

Mas sabemos que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$ é limitada, pois, pela desigualdade de Cauchy

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Portanto,

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g_1(t)dt \right| \longrightarrow 0,$$

o que implica que $\langle f, g_1 \rangle \longrightarrow 0$.

3) Seja $g(x) \in C[-\pi, \pi]$ e

$$G_n(x) = \begin{cases} g(\pi), & \text{se } x = -\pi, \\ n[g(-\pi + 1/n) - g(\pi)](x + \pi) - g(\pi), & \text{se } x \in [-\pi, -\pi + 1/n], \\ g(x), & \text{se } x \in [-\pi + 1/n, \pi] \end{cases}$$

Temos, por hipótese, que $g(x)$ é contínua em $[-\pi, \pi]$ o que implica que $\exists M$ tal que $|g(x)| \leq M$, consequentemente, $|G_n(x)| \leq M$, para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Assim,

$$\|g(x) - G_n(x)\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - G_n(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{-\pi+1/n} |g(x) - G_n(x)|^2 dx \leq 4M^2/n.$$

Logo,

$$\|g(x) - G_n(x)\|_2 \longrightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.2.12)$$

Agora, fazendo $g(x) = g(x) - G_n(x) + G_n(x)$ e usando a desigualdade triangular chegamos que

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \right| \leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)G_n(x)dx \right| + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)||g(x) - G_n(x)|dx.$$

Temos, pelo segundo item que $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)G_n(x)dx = 0$, uma vez que $G_n(x)$ satisfaz as mesmas condições do item citado. A partir disso e da desigualdade de Cauchy, teremos

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \right| \leq \|f(x)\|_2 \|g(x) - G_n(x)\|_2 \longrightarrow 0, \text{ por (2.2.12).}$$

Logo, $\langle f, g \rangle = 0$.

4) Tomemos $g(x) \in L_2[-\pi, \pi]$ tal que $g(x)$ seja limitada, isto é, $|g(x)| \leq M$.

Como $g(x) \in L_2[-\pi, \pi]$, temos que $g(x) \in L_1[-\pi, \pi]$. Assim, existe $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ pertencentes a $C[-\pi, \pi]$ que convergem para $g(x)$ em quase todo ponto tal que $|g_n(x)| \leq M$.

Do teorema de Lebesgue, que diz que *dados $f_1, f_2, \dots, f_n \in L(X)$ onde X é um conjunto mensurável e f_n é convergente em quase todo ponto do conjunto X e $g \in L(X)$ é tal que $\forall n \in \mathbb{N}$,*

$$|f_n(x)| \leq g(x),$$

então $\exists f \in L(X)$ tal que

$$\int_X |f_n(x) - f(x)|dx \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad f_n(x) \longrightarrow f(x)$$

em quase todo ponto de X , teremos que

$$\|g(x) - g_n(x)\|_1 \longrightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Consequentemente

$$\|g(x) - g_n(x)\|_2 \longrightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, $\exists g_n(x) = h(x) \in C[-\pi, \pi]$ tal que $\|g(x) - h(x)\|_2 < \epsilon$, o que implica, pelo terceiro item que

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \right| < \epsilon.$$

5) Tomemos, agora, uma função $g(x) \in L_2[-\pi, \pi]$ e uma outra função $g_n(x)$ contínua nesse mesmo intervalo tal que

$$g_n(x) = \sup(-n, \inf(g(x), n)).$$

Assim, como definida, $g_n(x)$ é limitada por n , e $g_n(x) \longrightarrow g(x)$, $n \rightarrow \infty$. Pela desigualdade triangular temos que

$$\|g_n(x) - g(x)\|^2 \leq (|g(x)| + |g_n(x)|)^2 \leq 4|g(x)|^2.$$

A partir do teorema de Lebesgue, podemos concluir que $\|g_n(x) - g(x)\|_1 \rightarrow 0$. Portanto, $\langle f, g \rangle = 0$.

Por último resta-nos observar que $\langle f, f \rangle = \|f\|^2 = 0$ se e somente se f é o elemento nulo do espaço. Portanto, concluímos que $\forall f \in L_2[-\pi, \pi]$ tal que $\langle f, g \rangle = 0$ para toda função g pertencente ao sistema trigonométrico, essa f só poderá ser a função nula do espaço. Logo, o sistema trigonométrico é uma base em $L_2[-\pi, \pi]$, em virtude da definição (5).

Assim, de acordo com o teorema (11), podemos concluir que a Série de Fourier para a função f converge em $L_2[-\pi, \pi]$. Isto é, as somas parciais da Série de Fourier $S_n(f)$ é tal que $\|S_n(f) - f\|_2 \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Pelo segundo item do teorema 11, temos que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

para qualquer $f \in L_2[-\pi, \pi]$, que é conhecida como *Igualdade de Parseval*.

Como consequência do teorema acima, temos que, para qualquer $f \in L_2[-\pi, \pi]$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

2.3 Convergência em um ponto

2.3.1 Formas integrais das séries de Fourier

Seja $L_1[-\pi, \pi] = \{f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \|f\|_1 < \infty\}$, onde

$$\|f\|_1 := \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt.$$

Pela desigualdade de Hölder temos que $L_2[-\pi, \pi]$ é subespaço de $L_1[-\pi, \pi]$.

Teorema 13 Para qualquer $f \in L_1[-\pi, \pi]$ e qualquer $\epsilon > 0$, existe g (que é uma combinação linear de funções características, ou seja, função escada) tal que $\|f - g\|_1 < \epsilon$.

Observação: Se considerarmos $g(t)$ função escada, então

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin ntdt \longrightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ e}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos ntdt \longrightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

pois, $g(t)$ é constante e as integrais

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin ntdt \text{ e } \int_{-\pi}^{\pi} \cos ntdt$$

convergem para zero quando $n \rightarrow \infty$.

Lema 6 Se f é uma função pertencente a $L_1[-\pi, \pi]$ então a_n, b_n (coeficientes da série de Fourier) convergem para zero quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} |a_n(f)| &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - g(t) + g(t)) \cos ntdt \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - g(t)) \cos ntdt \right| + \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos ntdt \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)| \underbrace{|\cos nt|}_{\leq 1} dt + \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos ntdt \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)| dt + \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos ntdt \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \|f - g\|_1 + |a_n(g)|, \end{aligned}$$

onde g é função característica. Então, de acordo com o teorema 13, g é tal que $\|f - g\|_1 < \epsilon$, e $\exists N$ tal que $\forall n > N$, $|a_n(g)| < \epsilon/2$.

Agora tomando

$$\|f - g\|_1 < \frac{\pi\epsilon}{2},$$

teremos

$$|a_n(f)| \leq \epsilon.$$

Portanto, $a_n(f) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. De maneira análoga, temos que $b_n(f) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. ■

A n -ésima soma parcial da série de Fourier é definida por

$$S_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Tomemos agora uma função f com período 2π , para mostrarmos o próximo lema

Lema 7 *Seja f qualquer função pertencente a $L_2[-\pi, \pi]$. Então*

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin(n+1/2)t}{2 \sin t/2} dt.$$

Demonstração.

1ª parte: Como f é uma função periódica, temos que $f(x+2\pi) = f(x)$. Mostraremos então, que isso implica

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_b^{b+2\pi} f(x) dx, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Deslocando o intervalo de integração, teremos

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi} f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^{b+2\pi} f(x) dx + \int_{b+2\pi}^{a+2\pi} f(x) dx \\ &= \underbrace{\int_b^{b+2\pi} f(x) dx}_{(I_1)} + \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{(I_2)} + \underbrace{\int_{b+2\pi}^{a+2\pi} f(x) dx}_{(I_3)}. \end{aligned}$$

Vamos calcular (I_3) fazendo a seguinte mudança de variável $\begin{cases} x = y + 2\pi, \\ dx = dy. \end{cases}$

Teremos que

$$I_3 = \int_b^a f(y+2\pi) dy = \int_b^a f(y) dy = - \int_a^b f(y) dy = -I_2.$$

Portanto

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)dx = \int_b^{b+2\pi} f(x)dx.$$

2ª parte:

$$\begin{aligned} S_n(f; x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \right) \cos kx \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \right) \sin kx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right\} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right\} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{2 \sin(t-x)/2}{2 \sin(t-x)/2} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right\} dt. \end{aligned}$$

Como temos que

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha & \text{e,} \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha. \end{cases}$$

Se subtrairmos uma da outra, teremos

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha.$$

Tomando $\alpha = k(t-x)$ e $\beta = \frac{t-x}{2}$ obtemos

$$\sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) (t-x) \right) - \sin \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) (t-x) \right) = 2 \sin \frac{t-x}{2} \cos k(t-x).$$

Então

$$\begin{aligned} S_n(f; x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{2 \sin(t-x)/2} \left\{ \sin \frac{t-x}{2} + \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{t-x}{2} \cos k(t-x) \right\} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{2 \sin(t-x)/2} \left\{ \sin \frac{t-x}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) (t-x) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) (t-x) \right) \right] \right\} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{2 \sin(t-x)/2} \left\{ \sin \frac{t-x}{2} + \sin \frac{3}{2}(t-x) - \sin \frac{1}{2}(t-x) \right. \\
&\quad \left. + \dots + \sin \left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x) - \sin \left(n - \frac{1}{2}\right)(t-x) \right\} dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(n+1/2)(t-x)}{2 \sin(t-x)/2} dt.
\end{aligned}$$

Agora faremos a seguinte mudança de variável $\begin{cases} u = t - x, \\ du = dt. \end{cases}$

Então

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) \frac{\sin(n+1/2)u}{2 \sin(u/2)} du.$$

3ª parte: Temos que as funções

$$f(x+u) \text{ e } \frac{\sin(n+1/2)u}{2 \sin(u/2)}$$

são periódicas na variável u , com período 2π , pois

$$\begin{aligned}
\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) u &= \sin \frac{u}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\sin \left(\left(k + \frac{1}{2}\right) u \right) - \sin \left(\left(k - \frac{1}{2}\right) u \right) \right] \\
&= \sin \frac{u}{2} + \sum_{k=1}^n 2 \cos ku \sin \frac{u}{2}.
\end{aligned}$$

Então

$$\frac{\sin(n+1/2)u}{2 \sin(u/2)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku = \frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \dots + \cos nu.$$

E o intervalo $[-\pi-x, \pi-x]$ é de comprimento 2π . Além disso, a integral sobre esse intervalo é a mesma que a integral sobre o intervalo $[-\pi, \pi]$, assim

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin(n+1/2)u}{2 \sin(u/2)} du.$$

■

Definiremos a soma modificada da série de Fourier por

$$\tilde{S}_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin nt}{t} dt.$$

Teorema 14 *Seja f uma função com período 2π , $f \in L_1[-\pi, \pi]$ e $x \in \mathbb{R}$. Então, a série de Fourier da função f é convergente no ponto x e tem soma $S(x)$ se e somente se $\tilde{S}_n(f; x)$ é convergente e $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n(f; x) = S(x)$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 S_n(f; x) - \tilde{S}_n(f; x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left(\frac{\sin(n+1/2)t}{2 \sin t/2} - \frac{\sin nt}{t} \right) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left(\frac{\sin nt \cos t/2 + \cos nt \sin t/2}{\sin t/2} \right. \\
 &\quad \left. - 2 \frac{\sin nt}{t} \right) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left(\frac{t \sin t/2 \cos nt + t \sin nt \cos t/2}{t \sin t/2} \right. \\
 &\quad \left. - 2 \frac{\sin nt \sin t/2}{t \sin t/2} \right) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos ntdt + \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \sin ntdt \right\}
 \end{aligned}$$

onde $g(t) = \frac{t \cos t/2 - 2 \sin t/2}{t \sin t/2}$.

Mas, pelo lema 6 temos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos ntdt \longrightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

E para

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \sin ntdt$$

temos

- $f(x+t)$ é uma função contínua e diferenciável,
- $\sin nt$ é um coeficiente de Fourier,
- $g(t)$ é contínua, pois no ponto $t = 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) \stackrel{L'Hospital}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t/2 \sin(t/2)}{\sin t/2 + t/2 \cos t/2} \not\rightarrow 0.$$

Como continuamos com uma indeterminação, vamos aplicar L'Hospital novamente. Então

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t/4 \cos(t/2) - 1/2 \sin(t/2)}{\cos(t/2) - t/4 \sin(t/2)} = 0$$

Assim

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \sin ntdt \longrightarrow 0$$

Portanto

$$S_n(f; x) - \tilde{S}_n(f; x) \longrightarrow 0, \quad \forall \quad x.$$

Ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n(f, x) = S(x).$$

■

2.3.2 Funções com Variação Limitada

Definição 7 *Seja a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida e limitada no intervalo fechado $[a, b]$. Seja*

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

uma partição do intervalo $[a, b]$. A quantidade

$$V(f; \Delta) = \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| \quad (2.3.13)$$

é chamada variação de $f(x)$ na partição Δ .

Seja $\mathcal{D}$ a família de todas as partições de $[a, b]$. Quando Δ percorre $\mathcal{D}$, as variações (2.3.13) tomam valores não-negativos. Se o conjunto destes valores é limitado superiormente, dizemos que a função $f(x)$ tem variação limitada em $[a, b]$. Quando isto acontece, o número

$$V(f, [a, b]) = \sup_{\Delta \in \mathcal{D}} V(f; \Delta)$$

é chamado variação total de $f(x)$ em $[a, b]$ ou simplesmente variação de $f(x)$ em $[a, b]$. O conjunto das funções com variação limitada em $[a, b]$ é denotado por $BV[a, b]$.

Lema 8 *Se $f(x)$ é monótona em $[a, b]$, então $f \in BV[a, b]$ e*

$$V(f; [a, b]) = |f(b) - f(a)|.$$

Lema 9 *Se $f(x)$ é diferenciável em $[a, b]$ e sua derivada é limitada em $[a, b]$, então $f \in BV[a, b]$.*

Demonstração. Existe um número não negativo M , tal que $|f'(x)| \leq M$, para todo $x \in [a, b]$. Portanto, pelo Teorema do Valor Médio, para toda partição Δ de $[a, b]$, temos

$$\begin{aligned} V(f; \Delta) &= \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^n |f'(\xi_j)|(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^n M(x_j - x_{j-1}) \\ &= M(b - a). \end{aligned}$$

Isto significa que a variação de $f(x)$ é limitada em $[a, b]$. ■

Lema 10 *Se $f \in BV[a, b]$, então $f(x)$ é limitada em $[a, b]$.*

Este fato é consequência imediata da desigualdade

$$|f(x) - f(a)| \leq V(f, [a, b])$$

então, se $f(x)$ é ilimitada em $[a, b]$, sua variação não pode ser limitada.

Existem também funções limitadas cujas variações não são limitadas. Uma tal função é a função de Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \text{ racional} \\ 1, & \text{para } x \text{ irracional} \end{cases}$$

considerada em qualquer intervalo $[a, b]$.

Teorema 15 *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tem variação limitada em $[a, b]$, então a sua variação em qualquer subintervalo de $[a, b]$ também é limitada. Além disso, para todo $c \in [a, b]$, temos*

$$V(f, [a, b]) = V(f, [a, c]) + V(f, [c, b]). \quad (2.3.14)$$

Demonstração. A existência das variações $V(f, [a, c])$ e $V(f, [c, b])$ é óbvia. Por isto provaremos (2.3.14). Seja Δ uma partição de $[a, b]$ definida por (2.3.13). Obviamente c pertence a um dos intervalos desta partição. Seja $c \in [x_{k-1}, x_k]$. Consideremos as correspondentes partições

$$\Delta_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} \leq c\},$$

$$\Delta_2 = \{c \leq x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b\}.$$

Sejam

$$V(f; \Delta_1) = \sum_{j=1}^{k-1} |f(x_j) - f(x_{j-1})| + |f(c) - f(x_{k-1})|,$$

$$V(f; \Delta_2) = |f(x_k) - f(c)| + \sum_{j=k+1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})|$$

as variações de f nestas partições. Para a variação de $f(x)$ na partição Δ , temos

$$\begin{aligned} V(f; \Delta) &= \sum_{j=1}^{k-1} |f(x_j) - f(x_{j-1})| + |f(x_k) - f(x_{k-1})| \quad (2.3.15) \\ &\quad + \sum_{j=k+1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})|. \end{aligned}$$

Consequentemente, pela definição da variação,

$$V(f; \Delta) \leq V(f; \Delta_1) + V(f; \Delta_2).$$

ou seja,

$$V(f; \Delta) \leq V(f; [a, c]) + V(f; [c, b]).$$

Esta desigualdade mostra que $V(f; [a, c]) + V(f; [c, b])$ é um limite superior para conjunto formado pelos valores de $V(f; \Delta)$ quando Δ percorre todas as partições $\mathcal{D}$. Desde que $V(f; [a, b])$ é igual ao menor limite superior deste conjunto, concluímos que

$$V(f; [a, b]) \leq V(f; [a, c]) + V(f; [c, b]). \quad (2.3.16)$$

Mostraremos agora a desigualdade oposta. Para este propósito, consideremos partições arbitrárias

$$\Delta' = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = c\}$$

$$\Delta'' = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = b\}$$

de $[a, c]$ e de $[c, b]$, respectivamente. Obviamente

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = b\}$$

é uma partição de $[a, b]$. Além disso,

$$V(f; \Delta) = V(f; \Delta') + V(f; \Delta'').$$

Portanto $V(f; \Delta') + V(f; \Delta'') \leq V(f; [a, b])$, o que é equivalente à desigualdade

$$V(f; \Delta') \leq V(f; [a, b]) - V(f; \Delta''). \quad (2.3.17)$$

Vamos fixar a partição Δ'' e deixar Δ' percorrer todas as partições de $[a, c]$. A desigualdade (2.3.17) mostra que o número $V(f; [a, b]) - V(f; \Delta'')$ é um limite superior para o conjunto de números $V(f; \Delta')$. Desde que $V(f; [a, c])$ não é um dos possíveis limites superiores para este conjunto, temos

$$V(f; [a, c]) \leq V(f; [a, b]) - V(f; \Delta''),$$

ou equivalentemente

$$V(f; \Delta'') \leq V(f; [a, b]) - V(f; [a, c]). \quad (2.3.18)$$

Lembrando que a partição foi fixa arbitrariamente, observamos que a desigualdade (2.3.18) significa que $V(f; [a, b]) - V(f; [a, c])$ é um limite superior do conjunto dos números $V(f; \Delta'')$ quando Δ'' percorre todas as partições de $[c, b]$. Daí, $V(f; [c, b]) \leq V(f; [a, b]) - V(f; [a, c])$ o que é equivalente a

$$V(f; [a, c]) + V(f; [c, b]) \leq V(f; [a, b]).$$

Esta desigualdade, junto com (2.3.16) implica em (2.3.14). ■

Representação das Funções com Variação Limitada como Diferença de Funções Monótonas

O teorema da seção anterior nos permite definir, para qualquer função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de variação limitada, uma nova função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ onde, para qualquer $x \in [a, b]$, $F(x)$ é definida por

$$F(x) = V(f, [a, x]).$$

Lema 11 *A função $F(x)$ é não negativa e crescente em $[a, b]$.*

Demonstração. Desde que a variação é sempre um número não negativo, $F(x)$ também é não negativa. Sejam x e y , $y \geq x$, dois pontos do intervalo $[a, b]$. Temos

$$F(y) = V(f, [a, y]) = V(f, [a, x]) + V(f, [x, y]) \geq V(f, [a, x]) = F(x),$$

o que significa que F é crescente. ■

Teorema 16 *Toda função com variação limitada pode ser representada como diferença de duas funções crescentes.*

Demonstração. Seja $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com variação limitada. Obviamente

$$f(x) = F(x) - [F(x) - f(x)],$$

onde $F(x)$ é a função definida acima. Já mostramos que $F(x)$ é crescente. Provaremos o teorema quando mostrarmos que $F(x) - f(x)$ é também crescente.

Sejam novamente x e y tais que $a \leq x \leq y \leq b$. Temos que mostrar que

$$F(x) - f(x) \leq F(y) - f(y),$$

ou equivalentemente, que

$$f(y) - f(x) \leq V(f; [x, y]). \quad (2.3.19)$$

Observe que os pontos x e y formam uma partição do intervalo $[x, y]$. Portanto $|f(y) - f(x)|$ é um dos números $V(f, \Delta)$ para f no intervalo $[x, y]$.

Desde que a variação é um limite superior para todos os tais números, temos que

$$|f(y) - f(x)| \leq V(f, [x, y]).$$

Esta é uma desigualdade mais forte do que (2.3.19). ■

Lema 12 *Sejam as funções $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com variação limitada. Então, as funções $f + g$, $f - g$ e fg também têm variações limitadas.*

Demonstração. Provaremos a afirmação do lema para a diferença $f - g$. Para a soma e o produto as demonstrações são análogas. Seja

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

uma partição arbitrária do intervalo $[a, b]$. Então, pela desigualdade do triângulo, temos

$$\sum_{j=1}^n |(f(x_j) - g(x_j)) - (f(x_{j-1}) - g(x_{j-1}))| \leq V(f; [a, b]) + V(g; [a, b]).$$

Isto mostra que o conjunto dos números $V(f - g; \Delta)$, quando Δ percorre todas as partições $\mathcal{D}$, é limitado superiormente. Portanto, a função $f(x) - g(x)$ tem variação limitada. ■

O teorema 16 e o lema 12 implicam imediatamente no seguinte fato

Corolário 3 *A função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tem variação limitada em $[a, b]$ se e somente se ela é diferença de duas funções crescentes.*

2.3.3 Critérios de Dini-Lipschitz e Dirichlet-Jordan

Observações

- Se $f(x) = c$, a série de Fourier será a própria $f(x)$.
- As somas parciais da Série de Fourier são dadas por

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Lema 13 *Sejam f, g duas funções somáveis, de período 2π , ou seja, $f, g \in L_1[-\pi, \pi]$ e seja $x \in \mathbb{R}$. Se*

$$h(t) = \frac{f(x+t) - g(x+t)}{t}$$

considerada como função da variável t , pertence a $L_1[-\pi, \pi]$, então as séries de Fourier das funções f e g são simultaneamente divergentes ou convergentes em x . Quando as séries convergem, elas têm a mesma soma.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n(f, x) - \tilde{S}_n(g, x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - g(x+t)) \frac{\sin nt}{t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(x+t) - g(x+t)}{t} \right) \sin ntdt. \end{aligned}$$

Temos por hipótese que $h(t) \in L_1[-\pi, \pi]$ e podemos observar que a última integral é o coeficiente b_n da série de Fourier de $h(t)$. Daí, pelo lema 6 temos que $b_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Assim

$$\tilde{S}_n(f, x) - \tilde{S}_n(g, x) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Se

$$\tilde{S}_n(f, x) \rightarrow \infty \Rightarrow \tilde{S}_n(g, x) \rightarrow \infty.$$

Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n(f, x) = S(x) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n(g, x) = S(x).$$

■

Teorema 17 (Princípio da Localização de Riemann) *Se $f, g \in L_1[-\pi, \pi]$ são somáveis e $f \equiv g$, para qualquer $U \ni x$ (U é uma vizinhança de x) então $S_n(f, x)$ e $S_n(g, x)$ são simultaneamente convergentes ou divergentes. Além disso, no caso de convergência, as somas coincidem.*

Demonstração.

- Temos U uma vizinhança qualquer de x , então $V = -x + U$ será uma vizinhança qualquer de zero.

- Se $F \in L_1[a, b]$ e G é tal que $|G(x)| < M$, $\forall x \in [a, b] \Rightarrow FG \in L_1[a, b]$.

Seja

$$h(t) = \begin{cases} 0 & , t \in V \\ \frac{f(x+t) - g(x+t)}{t} & , t \in (L_1[-\pi, \pi] \setminus V) \end{cases} \quad (2.3.20)$$

Observe que no resultado citado anteriormente $F(t) = f(x+t) - g(x+t)$ e $G(t) = \frac{1}{t}$. Daí, pelo lema 13 temos o resultado. ■

Corolário 4 *Sejam f e $g \in L_1[-\pi, \pi]$. Se existir $A > 0$, $\alpha > 0$ e $U \ni x$ tais que $|f(t) - g(t)| \leq A |t - x|^\alpha$, para qualquer $x \in U$, então $S_n(f, x)$ e $S_n(g, x)$ são simultaneamente convergentes ou divergentes. Além disso, no caso de convergência, as somas coincidem.*

Demonstração. Usaremos os seguintes fatos

- $\int_0^A \frac{1}{t^\beta} dt$ é integrável se $\beta < 1$.
- Se $|F| \leq G$, onde G é somável, então F é somável.

Temos que

$$|f(t) - g(t)| \leq A |t - x|^\alpha \Rightarrow \left| \frac{f(t) - g(t)}{t - x} \right| \leq \frac{A}{|t - x|^{1-\alpha}}.$$

Como $\alpha > 0 \Rightarrow 1 - \alpha < 1$, assim

$$\frac{A}{|t - x|^{1-\alpha}} \in L[-\pi, \pi].$$

Daí,

$$\frac{f(t) - g(t)}{t - x} \in L[-\pi, \pi].$$

Assim, pelo lema 13 temos o resultado. ■

Lema 14 *Sejam*

$$f \in L_1[-\pi, \pi], \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < \delta \leq \pi$$

e

$$\tilde{S}_{n,\delta}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) \frac{\sin nt}{t} dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.3.21)$$

Então $S_n(f, x)$ é convergente para $S(f, x)$ se e somente se $\tilde{S}_{n,\delta}(f, x)$ é convergente para $S(f, x)$.

Demonstração. Defina $t \in (x - \delta, x - \delta + 2\pi)$

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } x - \delta < t \leq x + \delta \\ 0, & \text{se } x + \delta < t \leq x - \delta + 2\pi \end{cases} \quad (2.3.22)$$

e $g(t+2\pi) = g(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Por (2.3.21) e (2.3.22), temos $\tilde{S}_{n,\delta}(f, x) = \tilde{S}_n(g, x)$, mas pelo teorema 17

$$\tilde{S}_n(g, x) \sim \tilde{S}_n(f, x)$$

daí

$$\tilde{S}_{n,\delta}(f, x) \sim \tilde{S}_n(f, x) \sim S_n(f, x).$$

Assim, se

$$S_n(f, x) \longrightarrow S(f, x) \Rightarrow \tilde{S}_{n,\delta}(f, x) \longrightarrow S(f, x)$$

$$\tilde{S}_{n,\delta}(f, x) \longrightarrow S(f, x) \Rightarrow S_n(f, x) \longrightarrow S(f, x).$$

■

Corolário 5 *Sejam $f \in L_1[-\pi, \pi]$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < \delta \leq \pi$ tal que as hipóteses do lema 14 sejam satisfeitas. Então*

$$\tilde{S}_{n,\delta}(f, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \frac{\sin nt}{t} dt \longrightarrow S(f, x)$$

Demonstração. Temos que

$$\tilde{S}_{n,\delta}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) \frac{\sin nt}{t} dt$$

ou seja

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{n,\delta}(f, x) &= \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^\delta f(x+t) \frac{\sin nt}{t} dt}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^0 f(x+t) \frac{\sin nt}{t} dt}_{I_2} \\ I_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t)}{2} \frac{\sin nt}{t} dt \\ I_2 &= \frac{2}{\pi} \int_{-\delta}^0 \frac{f(x+u)}{2} \frac{\sin nu}{u} du\end{aligned}$$

como $u = -t$

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_\delta^0 \frac{f(x-t)}{2} \frac{\sin(-nt)}{-t} (-dt) = \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x-t)}{2} \frac{\sin nt}{t} dt.$$

Daí teremos a igualdade. ■

Corolário 6 Se $f \in L_1[-\pi, \pi]$ e existe δ tal que $0 < \delta \leq \pi$ e $f(x-t) = -f(x+t)$, para qualquer $|t| < \delta$ então $S_n(f, x) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração.

$$\tilde{S}_{n,\delta}(f, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \frac{\sin nt}{t} dt.$$

Como por hipótese $f(x-t) = -f(x+t)$ então $\tilde{S}_{n,\delta}(f, x) = 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Portanto $S_n(f, x) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. ■

Teorema 18 (Critério de Dini-Lipschitz). Sejam $f \in L_1[-\pi, \pi]$, $x \in \mathbb{R}$, c uma constante e $U \ni 0$ tais que

$$\frac{f(x+t) - c}{t} \in L_1(U).$$

Então $S_n(f, x)$ é convergente e $S_n(f, x) \rightarrow c$, quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Tome no lema 13 $g(x+t) = c$. Daí

$$S_n(f, x) \sim S_n(g, x) \rightarrow c.$$

Portanto

$$S_n(f, x) \rightarrow c.$$

■

Corolário 7 (Lipschitz) *Sejam $f \in L_1[-\pi, \pi]$, $x \in \mathbb{R}$. Se f satisfaz a condição de Lipschitz em torno de x , isto é, se*

$$\text{existe } k > 0 \text{ e } \alpha > 0 \text{ tais que } |f(x+t) - f(x)| \leq k |t|^\alpha,$$

para qualquer t tal que $|t|$ é suficientemente pequeno, então $S_n(f, x) \rightarrow f(x)$, quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Seja $g(x+t) = f(t) = cte$

$$\left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| \leq \frac{k}{|t|^{1-\alpha}} = \frac{k}{|t|^p}, \quad 0 < p < 1$$

Daí por raciocínio análogo ao do corolário 4, temos o resultado. ■

Corolário 8 (Dini) *Se $f \in L_1[-\pi, \pi]$ é diferenciável em x , então $S_n(f, x) \rightarrow f(x)$, quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Seja $\frac{f(x+t) - c}{t} = \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$ (Pelo Critério de Dini-Lipschitz) onde $f(x) = c$.

Como f é diferenciável, $\frac{f(x+t) - f(x)}{t}$ é convergente quando $t \rightarrow 0$, pois

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(x)$$

Então existe uma vizinhança tal que $f'(x)$ é limitada. (Pois se f é derivável em $X(\text{compacto}) \Rightarrow f$ é contínua em $X(\text{compacto}) \Rightarrow f$ é limitada em $x(\text{compacto})$)

Portanto $\frac{f(x+t) - f(x)}{t}$ é limitada quando $t \in a$ uma vizinhança pequena de 0, isto é, existe $k > 0$ tal que $\left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| \leq k$ quando t pertence a $U \ni 0$.

Então $|f(x+t) - f(x)| \leq k |t|$, uma função de Lipschitz onde $\alpha = 1$.

Logo, pelo corolário 7, temos o resultado. ■

Sejam $[a, b]$, $\bar{x} = \{a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b\}$ e

$$V(f, \bar{x}) = \sum_{i=0}^n |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

Definição 8 $f \in BV[a, b]$ se $\sup V(f, \bar{x}) < \infty$. Se $f \in BV[a, b]$, $V(f, [a, b]) = \limsup V(f, \bar{x})$.

Lema 15 Se $f \in BV[a, b]$ então existem funções crescentes f_1, f_2 tais que $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$.

Lema 16 Se f tem derivada para qualquer $x \in [a, b]$ e $f'(x)$ é limitada em $[a, b]$, então $f \in BV[a, b]$.

Demonstração. Como $f'(x)$ é limitada, então existe M tal que $|f'(x)| \leq M$, para qualquer $x \in [a, b]$. Assim, para qualquer x , temos

$$V(f, \bar{x}) = \sum_{i=1}^n |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=1}^n |f'(\eta_i)| |x_{i+1} - x_i| \leq M(b-a).$$

■

Corolário 9 Se $f \in BV[a, b]$ e $f \in C^1[a, b]$ então $V(f, [a, b]) \leq \|f'\|_\infty (b-a)$

Definição 9 $f \in AC[a, b]$ (f é absolutamente contínua) se para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, $\Delta_i = (a_i, b_i)$, $\Delta_i \subset [a, b]$ e $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$ e

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$$

Lema 17 Se f tem derivada para qualquer $x \in [a, b]$ e $f'(x)$ é limitada em $[a, b]$, então $f \in AC[a, b]$. Isto significa que não flutua muito em qualquer ponto.

Lema 18 Se $f \in Lip_1[a, b]$ então $f \in AC[a, b]$.

Lema 19 Se $f \in AC[a, b]$ então $f \in BV[a, b]$.

Lema 20 Se $g \in L_1[a, b]$, $\alpha \in [a, b]$, então a função f definida por

$$f(x) = \int_{\alpha}^x g(t) dt, \text{ para qualquer } x \in [a, b]$$

é absolutamente contínua em $[a, b]$.

Lema 21 *Se ψ é monotonicamente crescente em $[a, b]$, então ψ tem no máximo um número enumerável de pontos de descontinuidade.*

Teorema 19 (Critério de Dirichlet-Jordan) *Sejam $f \in L_1[-\pi, \pi]$, $x \in \mathbb{R}$ e $f \in BV(U)$ onde $U \ni x$. Então a série de Fourier de f é convergente em x e a sua soma é*

$$S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

onde

$$f(x+0) = \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t > x}} f(t), \quad f(x-0) = \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ x > t}} f(t).$$

Demonstração. Temos que

$$\tilde{S}_{n,\delta}(f, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \frac{\sin nt}{t} dt.$$

Fazendo

$$c = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2},$$

$$\tilde{S}_{n,\delta}(c, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\delta c \frac{\sin nt}{t} dt = c$$

$$\tilde{S}_{n,\delta}(f, x) - \tilde{S}_{n,\delta}(c, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \varphi \frac{\sin nt}{t} dt = I_n$$

onde

$$\varphi(t) = \frac{f(x+t) - f(x+0) + f(x-t) - f(x-0)}{2}.$$

Temos que mostrar que $I_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$

$$\varphi(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \quad t > 0. \quad \varphi \in BV[0, \delta]$$

pois $\psi \in BV(U)$ e quando $t \in [0, \delta]$, teremos que ψ e t estão "próximas".

Daí pelo lema 15, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, onde $\varphi_1, \varphi_2 \nearrow (0, \delta)$ com $\varphi_i(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0, t > 0, i = 1, 2$.

Seja $\psi(t)$ tal que $\psi \nearrow, \psi(0) = 0, \psi(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0, t > 0$.

Consideremos

$$\int_0^\delta \psi(t) \frac{\sin nt}{t} dt = I_n(\psi).$$

Sabendo que a integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin \psi}{\psi} d\psi$$

é convergente, existe M tal que

$$\left| \int_0^t \frac{\sin \psi}{\psi} d\psi \right| < M, \text{ para qualquer } t \in \mathbb{R}.$$

Se $F_n(t) = \int_0^{nt} \frac{\sin \psi}{\psi} d\psi$ então para qualquer $n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$, $|F_n(t)| < M$.

Seja $\epsilon > 0$, $\psi \in C(V)$, $V \ni 0 \Rightarrow$ existe $\eta \in (0, \delta)$ tal que $\psi(\eta) < \frac{\epsilon}{4M}$

$$I_n(\psi) = \int_0^\eta \psi(t) \frac{\sin nt}{t} dt + \int_\eta^\delta \frac{\psi(t)}{t} \sin nt dt = I_{n1} + I_{n2}$$

Então $\frac{\psi(t)}{t}$ é contínua em quase todo ponto, então $\frac{\psi(t)}{t} \in L[\eta, \delta]$.

$$\frac{1}{\pi} I_{n,2} = b_n \left(\frac{\psi(t)}{t} \right) \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Portanto existe N tal que para qualquer $n > N$, $I_{n2} < \frac{\epsilon}{2}$

$$F'_n = \frac{\sin nt}{t},$$

o que implica que

$$I_{n1} = \int_0^\eta \psi(t) F'_n(t) dt = \int_0^\eta \psi(t) dF_n(t) = \psi(\eta) F_n(\eta) - \int_0^\eta F_n(t) d\psi(t).$$

Daí

$$|I_{n,1}| \leq |\psi(\eta)| |F_n(\eta)| + \left| \int_0^\eta F_n(t) d\psi(t) \right|,$$

ou seja

$$|I_{n,1}| \leq \frac{\epsilon}{4} + M \int_0^\eta d\psi(t) = \frac{\epsilon}{4} + V(\psi, [0, \eta]) M = \frac{\epsilon}{4} + M(\psi(\eta) - \psi(0)) = \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto

$$I_n(\psi) = \int_0^\delta \psi(t) \frac{\sin nt}{t} dt \longrightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Com isso, temos

$$\tilde{S}_{n,\delta}(f, x) - \tilde{S}_{n,\delta}(c, x) = \frac{2}{\pi} (I_n(\psi_1) - I_n(\psi_2)) \longrightarrow 0$$

pois $\psi = \psi_i$, quando $n \rightarrow \infty$. ■

2.4 Existência de funções contínuas com séries de Fourier divergentes

Teorema 20 (Teorema de Baire) *Sejam X um espaço de Banach e $F_1, \dots, F_n, \dots$ $F_k \subset X$ (F_k fechado) tal que $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = X$. Então, existem $n \in \mathbb{N}$, $\xi \in F_n$ e $\delta > 0$ tal que $B(\xi, \delta) \subset F_n$.*

Teorema 21 (Teorema do Gráfico Fechado) *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ um operador linear limitado (contínuo), onde $\mathcal{D}(T) \subset X$. Então $\mathcal{D}(T)$ é fechado em X se e somente se $T(\mathcal{D}(T))$ é fechado em Y .*

Teorema 22 *Sejam X espaço de Banach e Y espaço normado. Se $u_1, \dots, u_n, \dots$ são operadores lineares contínuos tais que $u_j : X \rightarrow Y$ e a sequência $\|u_1\|, \dots, \|u_n\|, \dots$ é não limitada, então $\exists \xi \in X$ tal que $\|u_1(\xi)\|, \dots, \|u_n(\xi)\|, \dots$ é não limitada.*

Demonstração.

Vamos supor que $\|u_1(x)\|, \dots, \|u_n(x)\|, \dots$ é limitada, para qualquer $x \in X$. Seja $k \in \mathbb{N}$,

$$F_k = \{x \in X : \|u_n(x)\| \leq k, \quad n = 1, 2, \dots\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \|u_n(x)\| \leq k\}.$$

Pelo teorema 21 temos que os conjuntos $\{x \in X : \|u_n(x)\| \leq k\}$ são fechados, logo a interseção F_k para $n = 1, 2, \dots$ é fechada, ou seja

$$F_k = \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x \in X : \|u_n(x)\| \leq k\}}_{\text{fechado}}}_{\text{fechado}}.$$

Deste modo podemos provar que $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = X$. De fato,

$$1) \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \subset X$$

$$\text{Para todo } F_k \subset X \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \subset X$$

$$2) X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$$

Seja $x_0 \in X$, por hipótese a sequência $\{\|u_n(x_0)\|\}_{n=1}^{\infty}$ é limitada, então

$$\exists M > 0 \text{ tal que } \|u_n(x_0)\| \leq M, \quad n = 1, 2, \dots$$

Se tomarmos $k > M \Rightarrow \|u_n(x_0)\| \leq M < k, \quad n = 1, 2, \dots$. Logo, temos que $x_0 \in F_k$.

Por 1) e 2) temos o resultado acima.

Como estamos nas condições do Teorema de Baire, existe $k \in \mathbb{N}$, $x \in F_k$ e $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset F_k$.

Seja $z \in B(0, \delta)$,

- $\|z + x - x\| = \|z\| \leq \delta \Rightarrow z + x \in B(x, \delta) \Rightarrow \|u_n(z + x)\| \leq k, \quad n = 1, 2, \dots$
- $\|-z + x - x\| = \|-z\| \leq \delta \Rightarrow -z + x \in B(x, \delta) \Rightarrow \|u_n(-z + x)\| \leq k, \quad n = 1, 2, \dots$

Mas,

$$\begin{aligned} \|u_n(z)\| &= \left\| u_n \left(\frac{1}{2}(z + x) - \frac{1}{2}(-z + x) \right) \right\| \\ &\leq \left\| u_n \left(\frac{z + x}{2} \right) \right\| + \left\| u_n \left(\frac{-z + x}{2} \right) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{2} u_n(z + x) \right\| + \left\| \frac{1}{2} u_n(-z + x) \right\| \\ &= \frac{1}{2} \|u_n(z + x)\| + \frac{1}{2} \|u_n(-z + x)\| \\ &\leq k, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Assim, se $z \in B(0, \delta)$ temos que $\|u_n(z)\| \leq k, \quad n = 1, 2, \dots$

Seja $y \in B(0, 1) \Rightarrow \delta y \in B(0, \delta) \Rightarrow \|u_n(\delta y)\| \leq k \Rightarrow \|u_n(y)\| \leq \frac{k}{\delta}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, $\|u_n\| \leq \frac{k}{\delta}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Contradição, pois por hipótese, $\|u_1\|, \dots, \|u_n\|, \dots$ é não limitada. ■

Seja

$$\tilde{C}[-\pi, \pi] = \left\{ f \in C(\mathbb{R}) : f(x + 2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)| \right\}$$

e

$$\tilde{S}_n(f) := \tilde{S}_n(f; 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin nt}{t} dt \in \mathbb{R}.$$

Teorema 23 Existe $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$ tal que $\tilde{S}_n(f; 0)$ é divergente $\implies f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$ tal que $|\tilde{S}_n(f)|$ é ilimitada.

Demonstração.

1º) $\tilde{S}_n : \tilde{C}[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ são os operadores

2º) $\tilde{C}[-\pi, \pi]$ é espaço de Banach

3º) $\mathbb{R}$ é normado

4º) $\tilde{S}_n$ é linear

5º) $\tilde{S}_n$ é contínuo

Seja $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} |\tilde{S}_n(f)| &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \left| \frac{\sin nt}{t} \right| dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} \|f\|_{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin nt}{t} \right| dt \\ &= \frac{1}{\pi} \|f\|_{\infty} n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin nt}{nt} \right| dt}_{\substack{\leq 1(*) \\ = 2\pi}} \\ &\leq 2n \|f\|_{\infty}. \end{aligned}$$

(*) Temos que

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1 \xrightarrow{x>0} \frac{|\sin x|}{x} \leq 1 \implies |\sin x| \leq x \text{ e } x - \sin x \geq 0 \text{ para } x \in (0, \pi/2).$$

6º) $\|\tilde{S}_n\|$ é ilimitada

$$\text{Seja } f_k(t) = \begin{cases} 0 & , -\pi \leq t \leq 0 \\ (k \sin(n/k))t & , 0 < t < 1/k \\ \sin(nt) & , 1/k \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Temos que $f_k \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$ e $\|f_k\| = 1$ isso implica $|\tilde{S}_n(f_k)| \leq \|\tilde{S}_n\|$ onde

$$\tilde{S}_n(f_k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_k(t) \frac{\sin(nt)}{t} dt.$$

$$\text{Mas, quando } k \rightarrow \infty, f_k(t) \rightarrow \bar{f}(t) = \begin{cases} 0 & , -\pi \leq t \leq 0 \\ \sin(nt) & , 0 < t \leq \pi. \end{cases}$$

Então $f_k(t)$ é limitada.

Logo

$$\tilde{S}_n(f_k) \longrightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \bar{f}(t) \frac{\sin(nt)}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2(nt)}{t} dt, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Fazendo a mudança de variável $\begin{cases} \psi = nt, \\ d\psi = 1/n \, dt \end{cases}$, teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2(nt)}{t} dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^{n\pi} \frac{\sin^2 \psi}{\psi} d\psi \\ &\geq \frac{1}{\pi} \int_1^{n\pi} \frac{\sin^2 \psi}{\psi} d\psi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_1^{n\pi} \frac{1 - \cos 2\psi}{2\psi} d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_1^{n\pi} \frac{d\psi}{\psi} - \frac{1}{2\pi} \int_1^{n\pi} \frac{\cos 2\psi}{2\psi} d2\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \ln(n\pi) - \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_1^{n\pi} \frac{d \sin 2\psi}{2\psi}}_{= I} \\ &= \frac{1}{2\pi} \ln(n\pi) - \frac{1}{2\pi} I. \end{aligned}$$

Calculando I obtemos

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{n\pi} \frac{d(\sin 2\psi)}{2\psi} \\ &\stackrel{p/partes}{=} \left. \frac{\sin 2\psi}{2\psi} \right|_1^{n\pi} - \underbrace{\int_1^{n\pi} \frac{\sin 2\psi}{2\psi^2} d\psi}_{= J} \\ &= -\frac{\sin 2}{2} - \frac{J}{2}. \end{aligned}$$

Mas,

$$|J| \leq \int_1^{n\pi} \frac{|\sin 2\psi|}{\psi^2} d\psi \leq \int_1^{n\pi} \frac{1}{\psi^2} d\psi = -\left. \frac{1}{\psi} \right|_1^{n\pi} = 1 - \frac{1}{n\pi} = \frac{n\pi - 1}{n\pi} < 1.$$

Então, quando $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2(nt)}{t} dt \geq \underbrace{\frac{1}{2\pi} \ln(n\pi)}_{\text{vai p/ } \infty} - \underbrace{\frac{1}{2\pi} I}_{\text{é limitado}}, \quad |I| \leq 1.$$

vai p/ ∞

Portanto, $\|\tilde{S}_n\|$ é ilimitada e existe $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$ tal que $|\tilde{S}_n(f)|$ é ilimitada (de acordo com o teorema 22).

2.5 Convergência em $L_p[-\pi, \pi]$

Seja o espaço

$$L_1[-\pi, \pi] = \{f(x) : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \|f(x)\|_{L_1} < \infty\},$$

cuja norma é definida por

$$\|f(x)\|_{L_1} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx.$$

A convergência das somas de Fejér em $L_1[-\pi, \pi]$ segue do seguinte teorema.

Teorema 24 *Seja uma função $f \in L_1[-\pi, \pi]$ 2π periódica. Então,*

$$\|\sigma_n(f, x) - f(x)\|_{L_1} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

Demonstração. Sabemos que

$$\begin{aligned} \|\sigma_n(f, x) - f(x)\|_{L_1} &= \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(f, x) - f(x)| dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \alpha(t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) K_n(t) dt \right| dx \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| K_n(t) dt \right) dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| dx \right) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \alpha(t) dt \end{aligned}$$

onde

$$\alpha(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| dx.$$

Vemos que $\alpha(0) = 0$, assim vamos provar que $\alpha(t)$ é contínua no ponto $t = 0$.

As funções contínuas são densas em $[-\pi, \pi]$ com respeito a norma L_1 .
Desta forma para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma $g \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$ tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

Como f e g são periódicas temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - g(x+t)| dx < \varepsilon,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

E como toda função contínua em um compacto também é uma função uniformemente contínua, segue que g tem esta última propriedade. Logo,

$$|g(x+t) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, |t| < \delta.$$

Então,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(x+t) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

Assim para $|t| < \delta$ teremos

$$\begin{aligned} |\alpha(t)| &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - g(x+t) + g(x+t) - g(x) + g(x) - f(x)| dx \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - g(x+t)| dx + \int_{-\pi}^{\pi} |g(x+t) - g(x)| dx \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - f(x)| dx \\ &= \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon. \end{aligned}$$

Desta forma, $|\alpha(t) - \alpha(0)| < 3\varepsilon$. Mas se tomarmos $\delta = 3\varepsilon$ teremos

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \alpha(t) dt \longrightarrow \alpha(0) = 0.$$

Portanto,

$$\|\sigma_n(f, x) - f(x)\|_{L_1} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

■

Agora, vamos considerar o espaço

$$L_p[-\pi, \pi] = \left\{ f(x) : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \|f(x)\|_{L_p} < \infty \right\},$$

cuja norma é definida por

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

A convergência das somas de Fejér em $L_p[-\pi, \pi]$ segue do seguinte teorema.

Teorema 25 *Para qualquer função $f \in L_p[-\pi, \pi]$ com $1 < p < \infty$ teremos*

$$\|\sigma_n(f) - f\|_{L_p} \longrightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

Demonstração. Sejam $f \in L_p[-\pi, \pi]$ e $n \in \mathbb{N}$ fixo.

Consideremos q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $g(x) \in L_q[-\pi, \pi]$. Segue da demonstração do teorema de Fejér que

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) K_n(t) dt,$$

onde

$$K_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin^2((n+1)/2)t}{(n+1) \sin^2(t/2)},$$

é o núcleo de Fejér.

Vemos que a soma $\sigma_n(f, x)$ de Fejér é a integral de convolução de $f(t)$ com o núcleo de Fejér.

Assim,

$$\sigma_n(f, x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) K_n(t) dt.$$

Aplicando a norma L_p temos

$$\|\sigma_n(f, x) - f(x)\|_{L_p} = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] K_n(t) dt \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Para mostrar que esta quantidade converge para zero quando $n \rightarrow \infty$, vamos considerar a seguinte integral

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (\sigma_n(f, x) - f(x)) g(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] K_n(t) dt \right\} g(x) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] g(x) dx \right\} K_n(t) dt \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)]g(x)dx &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |[f(x+t) - f(x)]g(x)|dx \\
 &\leq \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \\
 &= \alpha(t) \|g(x)\|_{L_q},
 \end{aligned}$$

onde

$$\alpha(t) = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \text{ e } \|g(x)\|_{L_q} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

Sabemos pela demonstração do teorema anterior, que $\alpha(t)$ é contínua em $t = 0$, isto é, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $|t| < \delta$ temos $|\alpha(t)| < \epsilon$. Assim, podemos mostrar

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{-\pi}^{\pi} [\sigma_n(f, x) - f(x)]g(x)dx \right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)]g(x)dx \right| K_n(t)dt \\
 &\leq \|g(x)\|_{L_q} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) K_n(t)dt \\
 &\leq 3\epsilon \|g(x)\|_{L_q},
 \end{aligned}$$

para todo n suficientemente grande. Logo, existe um natural ν , tal que

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} (\sigma_n(f, x) - f(x))g(x)dx \right| \leq 3\epsilon \|g(x)\|_{L_q}, \quad \forall n > \nu.$$

Certamente, $\sigma_n(f, x) - f(x)$ é um funcional linear em L_p , então pelo teorema de Riesz, existe $g \in L_p$, tal que o funcional admite uma representação através do produto interno

$$\sigma_n(f, x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} [\sigma_n(f, x) - f(x)]g(x)dx.$$

Assim, provamos que

$$|\sigma_n(f, x) - f(x)| \leq 3\epsilon \|g(x)\|_{L_q}.$$

Portanto, se usarmos a representação da norma de um funcional, teremos

$$\|\sigma_n(f, x) - f(x)\|_{L_p} \leq 3\epsilon, \quad \forall n > \nu.$$

■

2.6 Convergência em $L_p[-\pi, \pi]$

Seja o espaço

$$L_1[-\pi, \pi] = \{f(x) : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \|f(x)\|_{L_1} < \infty\},$$

cuja norma é definida por

$$\|f(x)\|_{L_1} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx.$$

A convergência das somas de Fejér em $L_1[-\pi, \pi]$ segue do seguinte teorema.

Teorema 26 *Seja uma função $f \in L_1[-\pi, \pi]$ 2π periódica. Então,*

$$\|\sigma_n(f, x) - f(x)\|_{L_1} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

Demonstração. Sabemos que

$$\begin{aligned} \|\sigma_n(f, x) - f(x)\|_{L_1} &= \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(f, x) - f(x)| dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \alpha(t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) K_n(t) dt \right| dx \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| K_n(t) dt \right) dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| dx \right) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \alpha(t) dt \end{aligned}$$

onde

$$\alpha(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| dx.$$

Vemos que $\alpha(0) = 0$, assim vamos provar que $\alpha(t)$ é contínua no ponto $t = 0$.

As funções contínuas são densas em $[-\pi, \pi]$ com respeito a norma L_1 .

Desta forma para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma $g \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$ tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

Como f e g são periódicas temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - g(x+t)| dx < \varepsilon,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

E como toda função contínua em um compacto também é uma função uniformemente contínua, segue que g tem esta última propriedade. Logo,

$$|g(x+t) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, |t| < \delta.$$

Então,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(x+t) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

Assim para $|t| < \delta$ teremos

$$\begin{aligned} |\alpha(t)| &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - g(x+t) + g(x+t) - g(x) + g(x) - f(x)| dx \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - g(x+t)| dx + \int_{-\pi}^{\pi} |g(x+t) - g(x)| dx \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - f(x)| dx \\ &= \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon. \end{aligned}$$

Desta forma, $|\alpha(t) - \alpha(0)| < 3\varepsilon$. Mas se tomarmos $\delta = 3\varepsilon$ teremos

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \alpha(t) dt \longrightarrow \alpha(0) = 0.$$

Portanto,

$$\|\sigma_n(f, x) - f(x)\|_{L_1} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

■

Agora, vamos considerar o espaço

$$L_p[-\pi, \pi] = \left\{ f(x) : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \|f(x)\|_{L_p} < \infty \right\},$$

cuja norma é definida por

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

A convergência das somas de Fejér em $L_p[-\pi, \pi]$ segue do seguinte teorema.

Teorema 27 Para qualquer função $f \in L_p[-\pi, \pi]$ com $1 < p < \infty$ teremos

$$\|\sigma_n(f) - f\|_{L_p} \longrightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

Demonstração. Sejam $f \in L_p[-\pi, \pi]$ e $n \in \mathbb{N}$ fixo.

Consideremos q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $g(x) \in L_q[-\pi, \pi]$. Segue da demonstração do teorema de Fejér que

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) K_n(t) dt,$$

onde

$$K_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin^2((n+1)/2)t}{(n+1) \sin^2(t/2)},$$

é o núcleo de Fejér.

Vemos que a soma $\sigma_n(f, x)$ de Fejér é a integral de convolução de $f(t)$ com o núcleo de Fejér.

Assim,

$$\sigma_n(f, x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) K_n(t) dt.$$

Aplicando a norma L_p temos

$$\|\sigma_n(f, x) - f(x)\|_{L_p} = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] K_n(t) dt \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Para mostrar que esta quantidade converge para zero quando $n \rightarrow \infty$, vamos considerar a seguinte integral

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (\sigma_n(f, x) - f(x)) g(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] K_n(t) dt \right\} g(x) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] g(x) dx \right\} K_n(t) dt \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] g(x) dx &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |[f(x+t) - f(x)] g(x)| dx \\ &\leq \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \alpha(t) \|g(x)\|_{L_q}, \end{aligned}$$

onde

$$\alpha(t) = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \text{ e } \|g(x)\|_{L_q} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

Sabemos pela demonstração do teorema anterior, que $\alpha(t)$ é contínua em $t = 0$, isto é, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $|t| < \delta$ temos $|\alpha(t)| < \epsilon$. Assim, podemos mostrar

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} [\sigma_n(f, x) - f(x)]g(x)dx \right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)]g(x)dx \right| K_n(t)dt \\ &\leq \|g(x)\|_{L_q} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) K_n(t)dt \\ &\leq 3\epsilon \|g(x)\|_{L_q}, \end{aligned}$$

para todo n suficientemente grande. Logo, existe um natural ν , tal que

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} (\sigma_n(f, x) - f(x))g(x)dx \right| \leq 3\epsilon \|g(x)\|_{L_q}, \quad \forall n > \nu.$$

Certamente, $\sigma_n(f, x) - f(x)$ é um funcional linear em L_p , então pelo teorema de Riesz, existe $g \in L_p$, tal que o funcional admite uma representação através do produto interno

$$\sigma_n(f, x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} [\sigma_n(f, x) - f(x)]g(x)dx.$$

Assim, provamos que

$$|\sigma_n(f, x) - f(x)| \leq 3\epsilon \|g(x)\|_{L_q}.$$

Portanto, se usarmos a representação da norma de um funcional, teremos

$$\|\sigma_n(f, x) - f(x)\|_{L_p} \leq 3\epsilon, \quad \forall n > \nu.$$

■

+

Capítulo 3

Aproximação Uniforme por Polinômios

3.1 Teorema de Chebyshev

Seja $[a, b]$ um dado intervalo finito.

Consideremos o espaço linear de todas as funções contínuas em $[a, b]$ e introduziremos uma norma nesse espaço definida por

$$\|f\| := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|. \quad (3.1.1)$$

É fácil ver que (3.1.1) é realmente uma norma e recebe o nome de *norma uniforme* (ou *norma de Chebyshev*).

Daqui para frente, o espaço normado das funções contínuas em $[a, b]$ será denotado por $C[a, b]$.

Como toda norma dá origem a uma distância, a norma uniforme dá origem à *distância uniforme*

$$\rho(f, g) := \|f - g\| := \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|. \quad (3.1.2)$$

No espaço métrico $C[a, b]$ consideremos o problema da melhor aproximação de funções contínuas por polinômios algébricos.

Chamaremos

$$E_n(f) := \inf_{p \in \pi_n} \|f - p\|$$

de *melhor aproximação uniforme* de f por polinômios p de grau n . Se o ínfimo é atingido para algum polinômio p^* de π_n , isto é, se

$$\|f - p^*\| = E_n(f),$$

o polinômio p^* é chamado *polinômio da melhor aproximação de f em π_n* .

Desde que $C[a, b]$ é um espaço normado e π_n é um subespaço linear de $C[a, b]$, o problema da existência de polinômio da melhor aproximação para toda função contínua f se resolve como consequência do teorema geral sobre aproximação em espaços lineares normados.

Teorema 28 (Teorema de Borel) *Para toda função f de $C[a, b]$ e todo número inteiro não negativo n , existe o polinômio de grau n da melhor aproximação de f .*

O problema da unicidade não pode ser resolvido pelo teorema geral sobre aproximação em espaços estritamente normados pois $C[a, b]$ não é estritamente normado, fato que podemos mostrar com o seguinte exemplo.

- Consideremos $[a, b] = [0, 1]$, $f_1(x) = 1$ e $f_2(x) = x$, temos

$$\|f_1\| = \|f_2\| = 1 \text{ e } \|f_1 + f_2\| = 2.$$

Consequentemente,

$$\|f_1 + f_2\| = \|f_1\| + \|f_2\|.$$

Mas, obviamente, f_1 e f_2 não são linearmente dependentes. Isso implica que $C[a, b]$ não é estritamente normado. Então, o problema da unicidade do polinômio da melhor aproximação uniforme não é elementar.

Lema 22 (Lema de Vallet-Poussin) *Seja $Q \in \pi_n$. Suponha que existem $n+2$ pontos $x_0 < \dots < x_{n+1}$ em $[a, b]$ e números positivos $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}$, tais que*

$$f(x_i) - Q(x_i) = (-1)^i \varepsilon \lambda_i, \quad i = 0, \dots, n+1, \quad (3.1.3)$$

onde $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$. Então,

$$E_n(f) \geq \lambda := \min_{0 \leq i \leq n+1} \lambda_i.$$

Demonstração. Suponhamos o contrário. Então, existe um polinômio $P \in \pi_n$, tal que

$$\|f - P\| = E_n(f) < \lambda.$$

dessa forma temos que $P \not\equiv Q$. Esta situação é representada pelo gráfico abaixo, que foi construído com base nas seguintes observações:

1. f é uma função contínua qualquer,
2. A propriedade $f(x_i) - Q(x_i) = (-1)^i \varepsilon \lambda_i$, $i = 0, 1, \dots, n+1$ e $\varepsilon = 1$ (ou $\varepsilon = -1$) significa que o gráfico de $Q(x)$ oscila sobre o gráfico de $f(x)$ de modo que a diferença $f - Q$ assume valores $\{\lambda_i\}$ com sinais que se alternam (começando com positivo se $\varepsilon = 1$ e negativo se $\varepsilon = -1$),
3. Como $\|f - P\| < \lambda$, o gráfico de P pertence a faixa de largura 2λ cuja curva central é f ,
4. λ é o menor valor possível.

Desde que o gráfico de Q forma $n+1$ barreiras nesta faixa (entre os pontos x_0 e x_1 , x_1 e x_2 , $\dots$, x_n e x_{n+1}), o gráfico de P cruza o gráfico de Q pelo menos em $n+1$ pontos distintos $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$. Logo, $P(\xi_i) - Q(\xi_i) = 0$ para $i = 1, \dots, n+1$. Mas $P - Q \in \pi_n$. Consequentemente, $P \equiv Q$. Chegamos a uma contradição.

Portanto, concluímos que

$$E_n(f) \geq \lambda.$$

■

A caracterização completa do polinômio da melhor aproximação é dada pelo grande matemático russo Pafnutii Lvovitch Chebyshev (1821-1894) através de seu famoso *Teorema de Alternância*. Esse teorema é a base da Teoria da Aproximação.

Teorema 29 (Teorema de Chebyshev sobre a alternância) *Seja f uma função arbitrária e contínua no intervalo finito e fechado $[a, b]$. A condição necessária e suficiente para que o polinômio P pertencente à π_n seja o polinômio de grau n da melhor aproximação para f em $[a, b]$ é que existam pelo menos $n + 2$ pontos $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ de $[a, b]$, tais que $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$ e*

$$f(x_i) - P(x_i) = (-1)^i \varepsilon \|f - P\|, \quad i = 0, \dots, n+1, \quad (3.1.4)$$

onde $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$.

Demonstração.

($\Leftarrow$) Tomemos P um polinômio qualquer de grau n que satisfaz

$$f(x_i) - P(x_i) = (-1)^i \varepsilon \|f - P\|, \quad i = 0, \dots, n+1.$$

Se fizermos $\|f - P\| = \lambda$ e aplicarmos o Lema 22, teremos

$$E_n(f) \geq \lambda = \|f - P\|. \quad (3.1.5)$$

Mas, pela definição de melhor aproximação, temos

$$E_n(f) = \inf \|f - P\|, \quad (3.1.6)$$

ou seja, $E_n(f)$ é a menor distância possível entre f e P . Logo, usando (3.1.5) e (3.1.6), concluímos que

$$E_n(f) = \|f - P\|.$$

Portanto, P é o polinômio que melhor aproxima f em $[a, b]$.

($\Rightarrow$) Queremos mostrar que existem $n + 2$ pontos de alternância onde P satisfaz $f(x_i) - P(x_i) = (-1)^i \varepsilon \|f - P\|$, $i = 0, \dots, n+1$ usando o fato de que P é o polinômio de grau n que melhor aproxima f .

Primeiramente vamos provar que P tangencia as duas linhas limite $f(x) - E_n(f)$ e $f(x) + E_n(f)$. Para isso, suponhamos que P tangencia somente uma das linhas limite, por exemplo, $f(x) + E_n(f)$, então

$$f(x) - E_n(f) < P(x) \leq f(x) + E_n(f),$$

então, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\begin{array}{ccccc} f(x) - E_n(f) & < & P(x) - c & < & f(x) + E_n(f) \\ -E_n(f) & < & P(x) - f(x) - c & < & E_n(f) \end{array} \quad (3.1.7)$$

Daí

$$|f(x) - (P(x) - c)| < E_n(f),$$

isso significa que o polinômio $[P(x) - c]$ aproxima $f(x)$ melhor do que $P(x)$, mas esta conclusão contraria a hipótese de que $P(x)$ é o polinômio da melhor aproximação. Portanto, $P(x)$ tangencia as duas linhas limite.

Agora, vamos mostrar que $f - P$ tem pelo menos $n + 2$ pontos de alternância em $[a, b]$. Para isso suponhamos que $f - P$ tem no máximo $m + 2$ pontos de alternância em $[a, b]$ com $m < n$. Sejam $\{x_i\}_{i=0}^{m+1}$ esses pontos, isto é, $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{m+1} \leq b$ e

$$f(x_i) - P(x_i) = (-1)^i \varepsilon \|f - P\| = (-1)^i \varepsilon E_n(f)$$

para $i = 0, 1, \dots, m + 1$ e $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$.

Para todo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, determinamos os pontos $\bar{x}_{i-1}$ e $\underline{x}_i$ do seguinte modo

- $\bar{x}_{i-1}$ é o limite superior exato de $x \in [x_{i-1}, x_i]$, ou seja, é o maior valor de x onde $f - P$ toca a linha $-E_n(f)$, então

$$f(x) - P(x) = (-1)^{i-1} \varepsilon E_n(f) \quad (3.1.8)$$

- $\underline{x}_i$ é o limite inferior exato de $x \in [x_{i-1}, x_i]$, ou seja, é o menor valor de x onde $f - P$ toca a linha $E_n(f)$, então

$$f(x) - P(x) = (-1)^i \varepsilon E_n(f) \quad (3.1.9)$$

Como f é uma função contínua, temos que (3.1.8) e (3.1.9) valem para todos os pontos limites $\bar{x}_{i-1}$ e $\underline{x}_i$. Consequentemente $\bar{x}_{i-1} < \underline{x}_i$ e $f - P$ tem raiz em algum ponto $\xi_i \in (\bar{x}_{i-1}, \underline{x}_i)$ para todo $i = 1, 2, \dots, m+1$.

Sejam $\xi_0 = a$ e $\xi_{m+2} = b$. Consideraremos o comportamento da diferença $f(x) - P(x)$ no intervalo $[\xi_i, \xi_{i+1}]$. Pela escolha dos pontos ξ_i é claro que $f(x) - P(x)$ atinge o máximo de seu módulo $E_n(f)$ somente com sinal $(-1)^i \varepsilon$ em $[\xi_i, \xi_{i+1}]$. Consequentemente

$$-E_n(f) < (-1)^i \varepsilon [f(x) - P(x)] \leq E_n(f)$$

para todo $x \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, m+1$. Como o número de intervalos $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ é finito, existe um número $\delta > 0$, tal que

$$-E_n(f) + \delta < (-1)^i \varepsilon [f(x) - P(x)] \leq E_n(f) \quad (3.1.10)$$

para $x \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$ e todo i . Introduzimos o polinômio

$$Q(x) := \lambda(x - \xi_1) \cdots (x - \xi_{m+1}),$$

onde λ é um número escolhido de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas

1. $|Q(x)| \leq \frac{\delta}{2}$, para todo $x \in [a, b]$,
2. $\text{ sinal}[Q(x)] = (-1)^i \varepsilon$ para todo $x \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$.

Como

$$|Q(x)| \leq \frac{\delta}{2} \Rightarrow |\lambda| |(x - \xi_1) \cdots (x - \xi_{m+1})| \leq \frac{\delta}{2}$$

Se tomarmos $M = \max_{x \in [a, b]} |(x - \xi_1) \cdots (x - \xi_{m+1})|$, teremos $|\lambda| \leq \frac{\delta}{2M}$. Analisando o sinal de λ , concluímos que

$$\lambda \leq \frac{(-1)^{m+1} \varepsilon \delta}{2M}$$

Admitimos no início que $m < n$ então, $Q(x) \in \pi_n$. Logo, $[P(x) + Q(x)] \in \pi_n$. Consideremos então a diferença $f(x) - [P(x) + Q(x)]$ em $[\xi_i, \xi_{i+1}]$. Pelas condições (1) e (2), temos

$$\frac{-\delta}{2} \leq Q(x) \leq \frac{\delta}{2} \quad \text{e} \quad \text{sign}[Q(x)] = \text{sign}[f(x) - P(x)]$$

e pela desigualdade (3.1.10), temos

$$-\left(E_n(f) - \frac{\delta}{2}\right) < (-1)^i \varepsilon \{f(x) - [P(x) + Q(x)]\} \leq \left(E_n(f) - \frac{\delta}{2}\right)$$

para todo $x \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, m+1$. Como a união dos m intervalos $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ cobre $[a, b]$, temos

$$\|f(x) - [P(x) + Q(x)]\| \leq E_n(f) - \frac{\delta}{2} < E_n(f)$$

Com isso, concluímos que $P+Q$ aproxima melhor f do que P . Como isso não pode acontecer, temos que $m \geq n$. Portanto, existe pelo menos $n+2$ pontos de alternância em $[a, b]$. ■

A unicidade do polinômio que melhor aproxima uma função segue facilmente do teorema de Chebyshev.

Corolário 10 *Para toda função contínua f em $[a, b]$ existe um único polinômio de grau n que melhor aproxima f .*

Demonstração. Suponhamos o contrário. Então, existe uma função contínua f e existem polinômios P e Q em π_n , $P \neq Q$ tais que

$$\|f - P\| = \|f - Q\| = E_n(f). \quad (3.1.11)$$

O polinômio $\frac{P+Q}{2}$ também é o polinômio que melhor aproxima f pois

$$\begin{aligned} E_n(f) &\leq \left\| f - \frac{P+Q}{2} \right\| = \frac{1}{2} \|(f-P) + (f-Q)\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|f-P\| + \frac{1}{2} \|f-Q\| = E_n(f). \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Alternância, existem pelo menos $n+2$ pontos $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ tais que

$$f(x_i) - \frac{P(x_i) + Q(x_i)}{2} = (-1)^i \varepsilon E_n(f) \quad (\varepsilon = 1 \text{ ou } \varepsilon = -1).$$

Consequentemente,

$$\left| \frac{f(x_i) - P(x_i)}{2} + \frac{f(x_i) - Q(x_i)}{2} \right| = E_n(f). \quad (3.1.12)$$

Mas,

$$|f(x_i) - P(x_i)| \leq E_n(f) \quad \text{e} \quad |f(x_i) - Q(x_i)| \leq E_n(f),$$

de acordo com a relação (3.1.11).

Então, para que a equação (3.1.12) seja satisfeita é necessário que

$$[f(x_i) - P(x_i)] \quad \text{e} \quad [f(x_i) - Q(x_i)]$$

tenham valores iguais a $E_n(f)$, isto é,

$$f(x_i) - P(x_i) = f(x_i) - Q(x_i), \quad i = 0, \dots, n+1.$$

Segue que $P(x_i) = Q(x_i)$ para $i = 0, \dots, n+1$, o que implica $P \equiv Q$. Chegamos a uma contradição com o fato de que $P \not\equiv Q$. Portanto, o polinômio da melhor aproximação é único.

■

Existem poucas funções para os quais o polinômio da melhor aproximação pode ser determinado de forma explícita. Um exemplo interessante é a função x^n :

• para todo n , o polinômio da melhor aproximação de grau $n-1$ de $f(x) = x^n$ em $[-1, 1]$ pode ser escrito explicitamente e está relacionado ao polinômio de Chebyshev $T_n(x)$. Pelo teorema da alternância, P_{n-1} é completamente determinado pela condição da existência de pelo menos $(n-1) + 2$ pontos $x_0, \dots, x_m$ em $[-1, 1]$, tais que

$$x_i^n - P_{n-1}(x_i) = (-1)^i \varepsilon \max_{x \in [-1, 1]} |x^n - P_{n-1}(x)|, \quad i = 0, \dots, n. \quad (3.1.13)$$

Mas, $x^n - P_{n-1}(x)$ é um polinômio de grau n com coeficiente do termo de maior grau igual a 1. Consequentemente, (3.1.13) será satisfeita se construirmos um polinômio da forma

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

que atinge o máximo de seu módulo em $[-1, 1]$ em $n+1$ pontos que alternam o sinal.

Como já sabemos que existe esse polinômio, mostremos apenas que o polinômio de Chebyshev T_n satisfaz às condições (3.1.13).

Como

$$\begin{aligned}\max_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| &= 1, \\ T_n(x) &= 2^{n-1}x^n + \dots, \\ T_n(\xi_k) &= (-1)^{n-k}, k = 0, \dots, n,\end{aligned}$$

onde $\xi_k = \cos \frac{k\pi}{n}$. Podemos afirmar que o polinômio

$$\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) = x^n - P_{n-1}(x)$$

satisfaz às condições exigidas nos pontos $\xi_0, \dots, \xi_n$. Então,

$$P_{n-1}(x) = x^n - \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$$

é o polinômio de melhor aproximação uniforme de grau $n-1$ para $f(x) = x^n$ em $[-1, 1]$.

3.2 Aproximação por Operadores Positivos

Já vimos que para toda função $f(x)$ contínua em $[a, b]$ e todo número natural n fixo, existe um polinômio da melhor aproximação p_n de grau n . Denotemos por $E_n(f)$ a melhor aproximação de f . Uma questão natural surge: $E_n(f)$ converge para zero quando n converge para infinito? Em outras palavras, o gráfico do polinômio da melhor aproximação se aproxima cada vez mais do gráfico de f quando $n \rightarrow \infty$? A resposta dessa questão foi dada por Weierstrass. Ele provou que toda função contínua é limite de uma sequência de polinômios algébricos. Ou, mais geometricamente, para qualquer faixa estreita escolhida ao redor do gráfico de uma função contínua f , pode-se achar um polinômio algébrico p cujo gráfico está localizado nessa faixa.

Antes de demonstrarmos este teorema faremos alguns resultados preliminares.

3.2.1 Teorema de Korovkin

Definição 10 (Módulo de continuidade) Seja f uma função definida em $[a, b]$. A quantidade

$$\omega(f; \delta) = \sup \{|f(x) - f(y)| : x, y \in [a, b], |x - y| \leq \delta\}$$

é chamada *módulo de continuidade de f* em $[a, b]$.

Esse módulo é definido para todo $\delta \in [0, b - a]$. Ele caracteriza completamente as funções contínuas do seguinte modo: a função f é contínua em $[a, b]$ se, e somente se, $\omega(f; \delta) \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$. De fato, se f é contínua no intervalo finito e fechado $[a, b]$, ela é uniformemente contínua e, conseqüentemente, para todo $\epsilon > 0$ existe um número $\delta > 0$, tal que se $|x - y| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ para todo ponto $x, y \in [a, b]$. Daí segue que $\omega(f; \delta) \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$. Por outro lado, se $\omega(f; \delta) \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$, então para todo $\epsilon > 0$ pode ser achado $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que $\omega(f; \delta) < \epsilon$. Segue que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ quando $|x - y| < \delta$, isto é f é uniformemente contínua em $[a, b]$.

Propriedades do módulo de continuidade

- 1) $\omega(f, \delta) \geq 0$, para todo $\delta \geq 0$.
- 2) Se $0 < \delta_1 \leq \delta_2$, então $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$.

A monotonicidade é uma consequência imediata da definição de $\omega(f; \delta)$.

- 3) Para todo número real $\lambda > 0$ vale a desigualdade

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq (1 + \lambda)\omega(f; \delta).$$

Demonstração.

- a) Suponhamos primeiramente que $\lambda \in \mathbb{N}$.

Seja $\lambda = k$. Consideremos $x < y$ pontos arbitrários de $[a, b]$, tais que $|x - y| \leq k\delta$. Dividimos o intervalo $[x, y]$ em $k + 1$ pontos equidistantes. Logo

$$|x_i - x_{i-1}| = \frac{|x - y|}{k} \leq \delta, \quad i = 1, \dots, k.$$

Mas

$$|f(x) - f(y)| = \left| \sum_{i=1}^k (f(x_i) - f(x_{i-1})) \right| \leq \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq k\omega(f; \delta).$$

Então, se $|x - y| \leq k\delta$, $|f(x) - f(y)| \leq k\omega(f; \delta)$.

Consequentemente

$$\omega(f; k\delta) \leq k\omega(f; \delta).$$

b) Seja agora λ um número real positivo arbitrário. Então $[\lambda] \leq \lambda < [\lambda] + 1$, onde $[\lambda]$ é a parte inteira de λ . Da desigualdade que acabamos de provar e a monotonicidade de $\omega(f; \delta)$ segue que para todo λ , $[\lambda] + 1 > 0$ tal que $\lambda < [\lambda] + 1$,

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq \omega(f; ([\lambda] + 1)\delta) \leq ([\lambda] + 1)\omega(f; \delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f; \delta).$$

Por a) e b) temos o resultado desejado. ■

Seja $L(f; \cdot) : C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$ um operador.

Definição 11 $L(f; x)$ é linear se $L(\alpha f + \beta g; x) = \alpha L(f; x) + \beta L(g; x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $x \in [a, b]$.

Definição 12 $L(f; x)$ é positivo se $L(f; x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, sempre quando $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Lema 23 $\omega(f; |x - y|) \leq \omega\left(f; \frac{(x - y)^2}{\delta}\right) + \omega(f; \delta)$, para todo $x, y \in [a, b]$.

Demonstração.

a) Pela propriedade 2) de módulo de continuidade se $|x - y| \leq \delta$ então $\omega(f; |x - y|) \leq \omega(f; \delta)$. Como $\omega(f; \delta) \geq 0$

$$\omega(f; |x - y|) \leq \omega\left(f; \frac{(x - y)^2}{\delta}\right) + \omega(f; \delta).$$

b) Se $|x - y| > \delta$, então $\frac{1}{|x - y|} < \frac{1}{\delta}$. Novamente, como $\omega(f; \delta) \geq 0$

$$\omega(f; |x - y|) \leq \omega\left(f; \frac{|x - y|^2}{\delta}\right) + \omega(f; \delta).$$

■

Lema 24 $|f(x) - f(t)| \leq \left(2 + \frac{(x - t)^2}{\delta^2}\right) \omega(f; \delta)$, para todo $x, t \in [a, b]$.

Demonstração. Pelo Lema 23, para x e t fixos temos que

$$|f(x) - f(t)| \leq \omega(f; |x - t|) \leq \omega\left(f; \frac{(x - t)^2}{\delta}\right) + \omega(f; \delta).$$

Usando a propriedade 3) chegamos que

$$|f(x) - f(t)| \leq \left[2 + \frac{(x - t)^2}{\delta^2}\right] \omega(f; \delta).$$

■

Lema 25 Para qualquer $f \in C[a, b]$ e $L(f; \cdot) : C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$ temos

$$|f(x) - L(f; x)| \leq \left[2 + \delta^{-2} L((t - x)^2; x)\right] \omega(f; \delta).$$

Demonstração. Do Lema 24 temos que

$$\left(2 + \frac{(x - t)^2}{\delta^2}\right) \omega(f, \delta) - f(x) + f(t) = \psi(t) \geq 0 \quad \text{e}$$

$$\left(2 + \frac{(x - t)^2}{\delta^2}\right) \omega(f, \delta) + f(x) - f(t) = \varphi(t) \geq 0.$$

Como $\psi(t), \varphi(t) \geq 0$ temos pela Definição 12 que $L(\psi(t); x), L(\varphi(t); x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$. Aplicando o operador linear e a definição de módulo chegamos no resultado desejado. ■

Teorema 30 (Teorema de Korovkin) Sejam $f \in C[a, b]$ e $L(f; \cdot) : C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$ um operador linear positivo que satisfaz

$$\begin{aligned} L(1; x) &= 1, \\ L(t; x) &= x + \alpha(x) \quad \text{e} \\ L(t^2; x) &= x^2 + \beta(x). \end{aligned}$$

Então

$$|f(x) - L(f; x)| \leq 3\omega\left(f; \sqrt{\beta(x) - 2x\alpha(x)}\right), \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Demonstração.

1) Mostremos que $\beta(x) - 2x\alpha(x) \geq 0$.

Observemos que

$$\begin{aligned} x^2 L(1; x) &= x^2, \\ -2x L(t; x) &= -2x^2 - 2x\alpha(x) \quad \text{e} \\ L(t^2; x) &= x^2 + \beta(x). \end{aligned}$$

Somando as três igualdades membro a membro e aplicando a definição de operador linear positivo temos que

$$0 \leq L((t-x)^2; x) = \beta(x) - 2x\alpha(x).$$

2) Fazendo $\delta = \sqrt{\beta(x) - 2x\alpha(x)}$ no Lema 25 e substituindo o resultado acima concluímos a demonstração do teorema. ■

O teorema de Weierstrass será provado usando a demonstração sugerida por S. N. Bernstein (1880-1968). Para toda função f contínua em $[a, b]$ ele construiu de forma explícita, polinômios algébricos que convergem para essa função na métrica uniforme.

3.2.2 Polinômios de Bernstein

Seja $f(t)$ uma função arbitrária definida no intervalo $[0, 1]$. O polinômio de Bernstein de grau n para a função f é denotado por $B_n(f; x)$ e é definido por

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \quad (3.2.14)$$

Verifica-se que $B_n(f; x) \in \pi_n$, $B_n(f; 0) = f(0)$ e $B_n(f; 1) = f(1)$. Além disso,

- 1) $B_n(cf; x) = cB_n(f; x)$ e
- 2) $B_n(f + g; x) = B_n(f; x) + B_n(g; x)$.

Estas propriedades mostram que $B_n(f; x)$ é um *operador linear* no espaço das funções definidas em $[0, 1]$.

Notemos também, que os polinômios

$$\varphi_{nk}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

são positivos em $(0, 1)$. Segue que se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [0, 1]$, então $B_n(f; x) \geq 0$ para todo $x \in [0, 1]$. Essa propriedade é chamada *positividade* do operador $B_n(f; x)$. Desta propriedade segue a *monotonicidade* de $B_n(f; x)$, isto é,

$$f(x) \leq g(x) \text{ em } [0, 1] \text{ implica } B_n(f; x) \leq B_n(g; x) \text{ em } [0, 1].$$

Lema 26

$$B_n(f; x) = \sum_{t=0}^n \Delta^t f(0) \binom{n}{t} x^t,$$

onde $\Delta^t f(0)$ é a diferença finita de f nos pontos $0, 1/n, 2/n, \dots, n/n$.

Demonstração. Usando a fórmula binomial de Newton para $(1-x)^{n-k}$, obtemos

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{n-k-j} \binom{n-k}{j} x^{n-k-j}.$$

Então,

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j} x^{n-j}.$$

Rearranjando o somatório temos que

$$\begin{aligned} B_n(f; x) &= \sum_{t=0}^n x^t \sum_{k=0}^t f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-t} (-1)^{t-k} \\ &= \sum_{t=0}^n x^t \binom{n}{t} \sum_{k=0}^t f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{t}{k} (-1)^{t-k}. \end{aligned}$$

Logo,

$$B_n(f; x) = \sum_{t=0}^n \Delta^t f(0) \binom{n}{t} x^t.$$

■

Lema 27 Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

- a) $B_n(1; x) = 1$,
- b) $B_n(t; x) = x$,
- c) $B_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$.

Demonstração.

a) Para $f(t) = 1$, usando (3.2.14) temos

$$B_n(1; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1.$$

b) Para $f(t) = t$, usando (3.2.14) temos

$$\begin{aligned} B_n(t; x) &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^{k-1} (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Mas $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$.

Fazendo a mudança de variável $j = k - 1$ e substituindo o resultado acima em $B_n(t; x)$ temos que

$$B_n(t; x) = x \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j}}_{=1} = x.$$

b) Para $f(t) = t^2$, novamente por (3.2.14)

$$\begin{aligned} B_n(t^2; x) &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $j = k - 1$ teremos que

$$\begin{aligned} B_n(t^2; x) &= x \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j+1}{n} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} \\ &= \frac{x}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} \\ &\quad + \frac{n-1}{n} x \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{j}{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j}}_{B_{n-1}(t; x)=x}. \end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$B_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

■

Teorema 31 (Teorema de Bernstein) Seja f função contínua no intervalo $[0, 1]$. Então, para todo n e todo $x \in [0, 1]$, temos

$$|f(x) - B_n(f; x)| \leq \frac{9}{2} \omega \left(f; \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Demonstração. Como $B_n(f; x)$ é um operador linear positivo que satisfaz as condições do Teorema de Korovkin onde $\alpha(x) = 0$ e $\beta(x) = x(1-x)/n$ temos que

$$|f(x) - B_n(f; x)| \leq 3 \omega \left(f; \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \right).$$

Pela propriedade 3) de módulo de continuidade temos que

$$|f(x) - B_n(f; x)| \leq 3(\sqrt{x(1-x)} + 1) \omega \left(f; \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Mas, $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ para $x \in [0, 1]$. Consequentemente,

$$|f(x) - B_n(f; x)| \leq \frac{9}{2} \omega \left(f; \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

■

Corolário 11 Para toda $f \in C[0, 1]$ temos que

$$\|f - B_n(f; x)\| \leq \frac{9}{2} \omega \left(f; \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Demonstração. Consequência imediata do teorema 31.

■

Corolário 12 Para toda $f \in C[0, 1]$ temos que

$$\|f - B_n(f; x)\| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Já sabemos que se $f \in C[0, 1]$, então $\omega(f; \delta) \rightarrow 0$, quando $\delta \rightarrow 0$. Logo, pelo corolário 11 temos o resultado. ■

Deste modo, como os resultados provados acima valem para um intervalo finito arbitrário podemos enunciar e demonstrar o teorema de Weierstrass para um intervalo finito $[a, b]$.

Teorema 32 (Teorema de Weierstrass). Seja $[a, b]$ um intervalo arbitrário finito e seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe um polinômio algébrico $P(x)$ tal que

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| \leq \epsilon.$$

Demonstração. Usaremos o Teorema 31. Para esse propósito introduzimos a função

$$h(t) = f(a + t(b - a)),$$

definida para todo $t \in [0, 1]$. Desde que f é contínua em $[a, b]$, $h(t)$ é contínua em $[0, 1]$ e, conseqüentemente,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(h; \delta) = 0.$$

Então existe n tal que

$$\frac{9}{2} \omega \left(h; \frac{1}{\sqrt{n}} \right) < \epsilon.$$

Pelo Teorema 31,

$$|h(t) - B_n(h; t)| \leq \frac{9}{2} \omega \left(h; \frac{1}{\sqrt{n}} \right) < \epsilon,$$

isto é, o polinômio $B_n(h; t)$ aproxima h em $[0, 1]$ com precisão ϵ . Voltando para a variável x pela substituição $t = \frac{x-a}{b-a}$, obtemos

$$\left| h \left(\frac{x-a}{b-a} \right) - B_n \left(h; \frac{x-a}{b-a} \right) \right| < \epsilon \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

■

3.3 Teorema de Jackson

3.3.1 Preliminares

Lema 28 Para qualquer função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ temos que

$$\omega(f; \delta_1 + \delta_2) \leq \omega(f; \delta_1) + \omega(f; \delta_2)$$

Demonstração. Da definição de módulo de continuidade para f , temos que

$$\omega(f; \delta_1 + \delta_2) = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in [a, b], |x - y| \leq \delta_1 + \delta_2\}$$

Observando que f é uma função contínua de x e y , então, pelo Teorema de Weierstrass, toda função contínua num compacto atinge o máximo. Assim,

$$\omega(f; \delta_1 + \delta_2) = |f(x^*) - f(y^*)| \text{ tal que } |x^* - y^*| \leq \delta_1 + \delta_2. \quad (3.3.15)$$

Logo podemos escolher z^* , $x^* < z^* < y^*$ tal que $|x^* - z^*| \leq \delta_1$ e $|z^* - y^*| \leq \delta_2$.

Assim, somando e subtraindo $f(z^*)$ em (3.3.15) e usando a desigualdade triangular, teremos

$$|f(x^*) - f(y^*)| \leq |f(x^*) - f(z^*)| + |f(z^*) - f(y^*)|$$

tal que $|x^* - z^*| \leq \delta_1$ e $|z^* - y^*| \leq \delta_2$.

Portanto,

$$\omega(f; \delta_1 + \delta_2) \leq |f(x^*) - f(z^*)| + |f(z^*) - f(y^*)| \leq \omega(f; \delta_1) + \omega(f; \delta_2).$$

■

Lema 29 Para todo $x \in (0, \pi/2]$, temos $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x} < 1$.

Demonstração. Sabemos que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Consequentemente,

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{5!}(20 - x^2) - \frac{x^7}{9!}(56 - x^2) - \dots < 0,$$

uma vez que $x \in (0, \pi/2]$. Portanto, $\frac{\sin x}{x} < 1$.

Para mostrarmos a primeira desigualdade vamos usar o fato de que $\frac{\sin x}{x}$ é decrescente em $(0, \pi/2)$, que realmente pode ser verificado, pois temos que

$$\frac{d}{dx}(x - \tan x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} < 0, \text{ para } x \in (0, \pi/2).$$

Isso implica que $x - \tan x$ é uma função decrescente. Consequentemente $\tan x > x$. Logo,

$$\sin x > x \cos x.$$

A partir disso, temos que

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} < 0, \text{ para } x \in (0, \pi/2).$$

Assim, se $x - \tan x$ é uma função decrescente, $\frac{\sin x}{x}$ também será. Portanto $\frac{\sin x}{x}$ atingirá o seu mínimo em $\frac{\pi}{2}$. Logo,

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \leq \frac{\sin x}{x}, \text{ para } x \in (0, \pi/2].$$

$$\text{Portanto, } \frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x} < 1. \quad \blacksquare$$

Lema 30 Se $T(\theta) \in \tau_m$ e $R(\theta) \in \tau_k$ então $T(\theta)R(\theta) \in \tau_{m+k}$

Demonstração. Sejam

$$T(\theta) = a_0 + \sum_{j=1}^m (a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta)$$

e

$$R(\theta) = c_0 + \sum_{i=1}^k (c_i \cos i\theta + d_i \sin i\theta),$$

logo,

$$\begin{aligned} T(\theta)R(\theta) &= a_0 c_0 + c_0 \sum_{j=1}^m (a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta) \\ &\quad + a_0 \sum_{i=1}^k (c_i \cos i\theta + d_i \sin i\theta) + \sum_{j=1}^m a_j \cos j\theta \sum_{i=1}^k c_i \cos i\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^m a_j \cos j\theta \sum_{i=1}^k d_i \sin i\theta \\
& + \sum_{j=1}^m b_j \sin j\theta \sum_{i=1}^k d_i \sin i\theta + \sum_{j=1}^m b_j \sin j\theta \sum_{i=1}^k c_i \cos i\theta
\end{aligned}$$

Observe que

- $a_0 c_0 = c_0 e$;
- $c_0 \sum_{j=1}^m a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta$ é um polinômio trigonométrico de grau m ;
- $a_0 \sum_{i=1}^k c_i \cos i\theta + d_i \sin i\theta$ é um polinômio trigonométrico de grau k ;
- O grau de $\sum_{j=1}^m a_j \cos j\theta \sum_{i=1}^k c_i \cos i\theta$ pode ser obtido usando a identidade

trigonométrica

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \{ \cos(a - b) + \cos(a + b) \}$$

Assim teremos que $\sum_{j=1}^m a_j \cos j\theta \sum_{i=1}^k c_i \cos i\theta$ será um polinômio trigonométrico de grau $m + k$;

- Fazendo o produto $\sum_{j=1}^m a_j \cos j\theta \sum_{i=1}^k d_i \sin i\theta$ e usando a identidade trigonométrica

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \{ \sin(a - b) + \sin(a + b) \}$$

temos que $\sum_{j=1}^m a_j \cos j\theta \sum_{i=1}^k d_i \sin i\theta$ será um polinômio trigonométrico de grau $m + k$;

- De maneira análoga, usando a identidade trigonométrica

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} \{ \cos(a - b) - \cos(a + b) \},$$

temos que $\sum_{j=1}^m b_j \sin j\theta \sum_{i=1}^k d_i \sin i\theta$ será um polinômio trigonométrico de grau $m + k$;

- Do mesmo modo $\sum_{j=1}^m b_j \sin j\theta \sum_{i=1}^k c_i \cos i\theta$, é um polinômio trigonométrico de grau $m + k$.

Portanto, $T(\theta)R(\theta) \in \tau_{m+k}$. ■

3.3.2 Demonstração de Jackson

Definição 13 O núcleo de Jackson pode ser definido por

$$J_{2n-2}(\theta) = \left\{ \frac{\sin n\theta/2}{n \sin \theta/2} \right\}^4 = \{K_{n-1}(\theta)\}^2 \in \tau_{2n-2}. \quad (3.3.16)$$

ou

$$J_{2n-2}(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2n-2} a_k \cos k\theta.$$

Observação:

O núcleo de Jackson é um polinômio trigonométrico par. Desta forma a integração pode ser feita somente no intervalo $[0, \pi]$, pois neste intervalo podemos transformar um polinômio trigonométrico em um polinômio algébrico. Esta transformação é possível pois neste intervalo o polinômio admite inversa, o que não ocorre no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Vamos definir

$$\gamma_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_{2n-2}(\theta) d\theta.$$

Consequentemente,

$$\frac{1}{\pi\gamma_n} \int_{-\pi}^{\pi} J_{2n-2}(\theta) d\theta = 1. \quad (3.3.17)$$

Lema 31 $\frac{1}{\pi\gamma_n} \int_0^{\pi} \{J_{2n-2}(\theta + y) + J_{2n-2}(\theta - y)\} d\theta = 1.$

Demonstração. Isto é consequência de (3.3.17) e do fato de J_{2n-2} ser par. ■

Para qualquer $f \in C[-1, 1]$, consideremos,

$$g(y) = \frac{1}{\pi\gamma_n} \int_0^{\pi} f(\cos \theta) \{J_{2n-2}(\theta + y) + J_{2n-2}(\theta - y)\} d\theta \in \tau_{2n-2}(\text{par}),$$

a partir do qual construiremos um polinômio algébrico de grau $2n - 2$ da seguinte maneira.

- Como $g(y)$ é um polinômio trigonométrico par, então a série de Fourier para g será

$$g(y) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{2n-2} A_k \cos ky,$$

se fizermos $\cos y = x$ teremos que o polinômio trigonométrico $g(y)$ se tornará o polinômio algébrico, que denotaremos por

$$Q_{2n-2}(f; x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{2n-2} A_k T_k(x),$$

onde $T_k(x) = \cos ky$, são os polinômios de Tchebyshev de primeira espécie.

Teorema 33 (Teorema de Jackson) *Para qualquer $f(x) \in C[-1, 1]$, podemos aproximá-la por um polinômio algébrico $Q_{2n-2}(x)$, onde $\cos y = x$. Assim,*

$$\begin{aligned} |f(x) - Q_{2n-2}(f; x)| &\leq C \left\{ \omega \left(f; \frac{|\sin y|}{n} \right) + \omega \left(f; \frac{1}{n^2} \right) \right\} \\ &= C \left\{ \omega \left(f; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right) + \omega \left(f; \frac{1}{n^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

Demonstração. Multiplicando o Lema 31 por $f(x)$, onde $f(x) \in C[-1, 1]$, $x = \cos y$ (por cálculos feito anteriormente)

$$f(x) = \frac{1}{\pi \gamma_n} \int_0^\pi f(\cos y) \{J_{2n-2}(\theta + y) + J_{2n-2}(\theta - y)\} d\theta$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(x) - Q_{2n-2}(f; x) &= \frac{1}{\pi \gamma_n} \int_0^\pi \{f(\cos y) - f(\cos \theta)\} \{J_{2n-2}(\theta + y) \\ &\quad + J_{2n-2}(\theta - y)\} d\theta \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |f(x) - Q_{2n-2}(f; x)| &\leq \frac{1}{\pi \gamma_n} \int_0^\pi |f(\cos y) - f(\cos \theta)| \{J_{2n-2}(\theta + y) \\ &\quad + J_{2n-2}(\theta - y)\} d\theta \\ &\leq \frac{1}{\pi \gamma_n} \int_0^\pi \omega(f; |\cos y - \cos \theta|) \{J_{2n-2}(\theta + y) \\ &\quad + J_{2n-2}(\theta - y)\} d\theta, \end{aligned}$$

em virtude da definição de módulo de continuidade. Usando a identidade trigonométrica

$$\cos a - \cos b = -2 \cos \frac{b-a}{2} \sin \frac{b+a}{2},$$

e ainda o núcleo de Jackson dado por (3.3.16), temos

$$\begin{aligned} |f(x) - Q_{2n-2}(f; x)| &\leq \frac{1}{\pi \gamma_n} \int_0^\pi \omega \left(f; 2 \left| \sin \frac{\theta+y}{2} \sin \frac{\theta-y}{2} \right| \right) \\ &\quad \times \left\{ \left(\frac{\sin \frac{n(\theta+y)}{2}}{n \sin \frac{(\theta+y)}{2}} \right)^4 + \left(\frac{\sin \frac{n(\theta-y)}{2}}{n \sin \frac{(\theta-y)}{2}} \right)^4 \right\} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi \gamma_n} \int_0^\pi \omega \left(f; 2 \left| \sin \frac{\theta+y}{2} \sin \frac{\theta-y}{2} \right| \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\sin \frac{n(\theta+y)}{2}}{n \sin \frac{(\theta+y)}{2}} \right)^4 d\theta \\ &\quad + \frac{1}{\pi \gamma_n} \int_0^\pi \omega \left(f; 2 \left| \sin \frac{\theta+y}{2} \sin \frac{\theta-y}{2} \right| \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\sin \frac{n(\theta-y)}{2}}{n \sin \frac{(\theta-y)}{2}} \right)^4 d\theta \\ &= I_n(\omega, y) + I_n(\omega, -y) \end{aligned}$$

Sejam $h_+(\theta)$ o integrando de $I_n(\omega, y)$ e $h_-(\theta)$ o integrando de $I_n(\omega, -y)$.

Mas

$$h_+(-\theta) = h_-(\theta) \quad \text{e} \quad h_+(-\theta) = h_+(\theta).$$

Então

$$\int_0^\pi h_-(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^0 h_+(\theta) d\theta$$

ou seja

$$I_n(\omega; y) = \int_0^\pi h_+(\theta) d\theta$$

e

$$I_n(\omega; -y) = \int_0^\pi h_-(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^0 h_+(\theta) d\theta.$$

Logo

$$I_n(\omega; y) + I_n(\omega; -y) = \int_0^\pi h_+(\theta) d\theta + \int_{-\pi}^0 h_+(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^\pi h_+(\theta) d\theta.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} |f(x) - Q_{2n-2}(f; x)| &\leq \frac{1}{\pi\gamma_n} \int_{-\pi}^\pi \omega\left(f; 2 \left| \sin \frac{\theta+y}{2} \sin \frac{\theta-y}{2} \right| \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\sin \frac{n(\theta+y)}{2}}{n \sin \frac{(\theta+y)}{2}} \right)^4 d\theta. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\frac{\theta+y}{2} = t$, temos

$$\begin{aligned} |f(x) - Q_{2n-2}(f; x)| &\leq \frac{1}{\pi\gamma_n} \int_{-\frac{\pi}{2}+\frac{y}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{y}{2}} \omega(f; 2 |\sin t \sin(t-y)|) \\ &\quad \times \left(\frac{\sin nt}{n \sin t} \right)^4 2dt \\ &= \frac{2}{n^4\pi\gamma_n} \int_{-\frac{\pi}{2}+\frac{y}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{y}{2}} \omega(f; 2 |\sin t \sin(t-y)|) \\ &\quad \times \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^4 dt \end{aligned}$$

onde o integrando é π -periódico pois módulo da função seno é π -periódica. Então é equivalente integrarmos no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ou seja,

$$\begin{aligned} |f(x) - Q_{2n-2}(f; x)| &\leq \frac{2}{n^4\pi\gamma_n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \omega(f; 2 |\sin t \sin(t-y)|) \\ &\quad \times \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^4 dt, \end{aligned}$$

Sejam

$$H_-(t) = \omega(f; 2 |\sin t \sin(t-y)|) \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^4$$

e

$$H_+(t) = \omega(f; 2 |\sin t \sin(t+y)|) \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^4$$

Mas

$$H_-(-t) = H_+(t) \quad \text{e} \quad H_+(-t) = H_-(t)$$

Então

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 H_-(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} H_+(t) dt$$

ou seja

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} H_-(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} H_+(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} H_-(t) dt$$

Logo

$$\begin{aligned} |f(x) - Q_{2n-2}(f; x)| &\leq \frac{2}{n^4 \pi \gamma_n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(f; 2|\sin t \sin(t+y)|) \\ &\quad \times \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^4 dt \\ &\quad + \frac{2}{n^4 \pi \gamma_n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(f; 2|\sin t \sin(t-y)|) \\ &\quad \times \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^4 dt \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Seja $\delta = 2|\sin t \sin(t \pm y)|$. Assim,

$$\begin{aligned} |\sin t \sin(t \pm y)| &= |\sin t(\sin t \cos y \pm \cos t \sin y)| \\ &\leq |\cos y| \sin^2 t + |\sin t \cos t| \cdot |\sin y| \end{aligned}$$

Mas $|\cos y| \leq 1$ e $\frac{\sin 2t}{2} = \sin t \cos t$, então

$$|\sin t \sin(t \pm y)| \leq \sin^2 t + |\sin y| \cdot \frac{|\sin 2t|}{2}$$

Pelo Lema 29 temos que $\sin^2 t \leq t^2$ e $\frac{\sin 2t}{2} \leq t$, então

$$\delta \leq 2(t^2 + |\sin y|t),$$

para qualquer $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Logo,

$$\omega(f; \delta) \leq 2\omega(f; t^2 + t|\sin y|) \leq 2\omega(f; t^2) + 2\omega(f; t|\sin y|).$$

Portanto,

$$|I_1| \leq \frac{4}{n^4 \pi \gamma_n} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(f; t^2) \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^4 dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(f; t |\sin y|) \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^4 dt \right\}$$

e

$$|I_2| \leq \frac{4}{n^4 \pi \gamma_n} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(f; t^2) \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^4 dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(f; t |\sin y|) \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^4 dt \right\}$$

Usaremos a notação $|I_{1,2}|$ para representar $|I_1|$ e $|I_2|$, já que os resultados acima são iguais, ou seja,

$$\begin{aligned} |I_{1,2}| &\leq \frac{4}{n^4 \pi \gamma_n} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(f; t^2) \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^4 dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(f; t |\sin y|) \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^4 dt \right\} \\ &= \frac{4}{n^4 \pi \gamma_n} \{L_1 + L_2\} \end{aligned}$$

Analisaremos agora, as integrais L_1 e L_2 . Sabemos que

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(f; t^2) \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^4 dt \\ &\leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(f; t^2) \left(\frac{\sin nt}{t} \right)^4 dt \end{aligned}$$

fazendo $nt = u$, teremos que $\omega(f; \frac{u^2}{n^2}) \leq (u^2 + 1)\omega(f; \frac{1}{n^2})$, consequentemente,

$$L_1 \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 n^3 \omega \left(f; \frac{1}{n^2} \right) \int_0^{n\frac{\pi}{2}} (u^2 + 1) \left(\frac{\sin u}{u} \right)^4 du.$$

Ao integrarmos no infinito teremos que esta integral será convergente, pois uma integral do tipo $\int_a^\infty \frac{1}{u^\alpha} du$ é convergente se $\alpha > 1$. Assim,

$$L_1 \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 n^3 \omega \left(f; \frac{1}{n^2} \right) K,$$

onde K é uma constante.

De maneira análoga temos que

$$L_2 \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 n^3 \omega \left(f; \frac{|\sin y|}{n} \right) \int_0^{n\frac{\pi}{2}} (u + 1) \left(\frac{\sin u}{u} \right)^4 du,$$

e ainda

$$L_2 \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 n^3 \omega \left(f; \frac{|\sin y|}{n} \right) K,$$

onde K é uma constante.

Assim,

$$\begin{aligned} |I_{1,2}| &\leq \frac{4}{n^4 \pi \gamma_n} (L_1 + L_2) \\ &\leq \frac{\pi^3}{4n \gamma_n} \left(\omega \left(f; \frac{1}{n^2} \right) K + \omega \left(f; \frac{|\sin y|}{n} \right) K \right) \\ &\leq \frac{\pi^3}{4n \gamma_n} K \left\{ \omega \left(f; \frac{|\sin y|}{n} \right) + \omega \left(f; \frac{1}{n^2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Analisando agora, γ_n , temos

$$\gamma_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_{2n-2}(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{n \sin \frac{\theta}{2}} \right)^4 d\theta$$

fazendo $\frac{\theta}{2} = \dot{\theta}$

$$\gamma_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin n\dot{\theta}}{n \sin \dot{\theta}} \right)^4 d\dot{\theta}$$

e com $\dot{\theta} = \theta$, temos

$$\gamma_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin n\theta}{n \sin \theta} \right)^4 d\theta$$

como $\frac{1}{\sin \theta} \geq \frac{1}{\theta}$

$$\gamma_n \geq \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin n\theta}{n\theta} \right)^4 d\theta$$

e com a seguinte mudança de variável, $n\theta = t$,

$$\gamma_n = \frac{4}{n\pi} \int_0^{n\pi/2} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^4 dt = \frac{\tilde{c}}{n},$$

onde $\tilde{c}$ é uma constante.

Portanto,

$$|f(x) - Q_{2n-2}(f; x)| \leq C \left\{ \omega \left(f; \frac{|\sin y|}{n} \right) + \omega \left(f; \frac{1}{n^2} \right) \right\}.$$

Mas $x = \cos y$ então $|\sin y| = \sqrt{1 - x^2}$, então

$$\begin{aligned} |f(x) - Q_{2n-2}(f; x)| &\leq C \left\{ \omega \left(f; \frac{|\sin y|}{n} \right) + \omega \left(f; \frac{1}{n^2} \right) \right\} \\ &= C \left\{ \omega \left(f; \frac{\sqrt{1 - x^2}}{n} \right) + \omega \left(f; \frac{1}{n^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

■

Corolário 13 $|f(x) - Q_{2n-2}(f; x)| \leq c \omega \left(f; \frac{1}{n} \right)$.

Demonstração. No Teorema de Jackson, para qualquer $x \in [-1, 1]$, $\omega \left(f; \frac{\sqrt{1 - x^2}}{n} \right)$ terá valor máximo quando $x = 0$. Assim,

$$\omega \left(f; \frac{\sqrt{1 - x^2}}{n} \right) \leq \omega \left(f; \frac{1}{n} \right).$$

e

$$\omega \left(f; \frac{1}{n^2} \right) \leq \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \omega \left(f; \frac{1}{n} \right) \leq 2 \omega \left(f; \frac{1}{n} \right).$$

Portanto,

$$|f(x) - Q_{2n-2}(f; x)| \leq C \left\{ \omega \left(f; \frac{\sqrt{1 - x^2}}{n} \right) + \omega \left(f; \frac{1}{n^2} \right) \right\} \leq c \omega \left(f; \frac{1}{n} \right).$$

■

Corolário 14 *O erro cometido na aproximação da função $f(x)$ pelo polinômio algébrico $Q_{2n-2}(f; x)$ é*

$$E_{2n-2}(f) \leq c \omega \left(f; \frac{1}{n} \right), \text{ para qualquer } f \in C[-1, 1].$$

Demonstração. Temos que

$$E_{2n-2}(f) = \inf \|f(x) - Q_{2n-2}(f; x)\| \leq |f(x) - Q_{2n-2}(f; x)| \leq c \omega \left(f; \frac{1}{n} \right).$$

■

Corolário 15 *Para qualquer $f \in C[-1, 1]$, $E_m(f) \leq c \omega \left(f; \frac{1}{m} \right)$.*

Demonstração. Tomemos, no corolário 14, $m = 2n - 2$. Assim, teremos que

$$E_m(f) \leq c \omega \left(f; \frac{2}{m+2} \right) \leq (2+1)c \omega \left(f; \frac{1}{m+2} \right) \leq 3c \omega \left(f; \frac{1}{m} \right).$$

Seja P_m^* o polinômio da melhor aproximação de f . Então

$$E_m(f) = \|f - P_m^*\|,$$

como $m < n$, temos que $P_m^* \in \Pi_n$, e assim,

$$E_n(f) = \inf_{P \in \Pi_n} \|f - P\| \leq \|f - P_m^*\| = E_m(f).$$

Logo

$$E_n(f) < E_m(f), \text{ para qualquer } n > m.$$

■

3.3.3 Demonstração de Rivlin

Vimos anteriormente, que a n -ésima soma parcial da série de Fourier é dada por

$$S_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

onde

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt.$$

Consideremos

$$q_n(f; \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_{k,n} [a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta]. \quad (3.3.18)$$

Nosso objetivo é mostrar que

$$|f(\theta) - q_n(f; \theta)| \leq cw \left(f; \frac{1}{n} \right).$$

Lema 32 *Seja $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$. Podemos escrever o polinômio dado em (3.3.18) como*

$$q_n(f; \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t + \theta) K_n(t) dt$$

onde

$$K_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_{k,n} \cos kt.$$

Demonstração. Vamos substituir a_k e b_k em (3.3.18), então

$$\begin{aligned}
 q_n(f; \theta) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \right] + \sum_{k=1}^n \rho_{k,n} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \cos k\theta \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \sin k\theta \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_{k,n} (\cos kt \cos k\theta + \sin kt \sin k\theta) \right] dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_{k,n} \cos k(t - \theta) \right] dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(t - \theta) dt
 \end{aligned}$$

Fazendo $t = t + \theta$, teremos

$$q_n(f; \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-\theta}^{\pi-\theta} f(t + \theta) K_n(t) dt.$$

Como $f(t + \theta)$ e $K_n(t)$ são 2π periódicas na variável t , temos

$$q_n(f; \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t + \theta) K_n(t) dt.$$

■

Lema 33 *Suponha que $\rho_{1,n}, \dots, \rho_{n,n}$ são tais que $K_n(t) \geq 0$ com $-\pi \leq t \leq \pi$. Então, para $-\pi \leq \theta \leq \pi$, temos*

$$|f(\theta) - q_n(f; \theta)| \leq w\left(f; \frac{1}{n}\right) \left[1 + \frac{n\pi}{\sqrt{2}} (1 - \rho_{1,n})^{1/2} \right],$$

onde $\rho_{1,n} \leq 1$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_{k,n} \cos kt \right) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dt + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^n \rho_{k,n} \cos kt \right) dt \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} t \Big|_{-\pi}^{\pi} + \sum_{k=1}^n \rho_{k,n} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt dt}_{=0} \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{2\pi}{2} \right\} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Daí

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 1$$

Multiplicando este resultado por $f(\theta)$, temos

$$f(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) K_n(t) dt.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|f(\theta) - q_n(f; \theta)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) K_n(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t + \theta) K_n(t) dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta) - f(t + \theta)] \underbrace{K_n(t)}_{\geq 0} dt \right| \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - f(t + \theta)| K_n(t) dt \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sup_{|t| < \delta} |f(\theta) - f(t + \theta)| K_n(t) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(f; |t|) K_n(t) dt
\end{aligned}$$

Como

$$w(f; |t|) \leq (n|t| + 1)w(f; 1/n).$$

Temos

$$\begin{aligned}
|f(\theta) - q_n(f; \theta)| &\leq w\left(f; \frac{1}{n}\right) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + n|t|) K_n(t) dt \\
&= w\left(f; \frac{1}{n}\right) \left\{ 1 + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| K_n(t) dt \right\}
\end{aligned}$$

Calculando $\int_{-\pi}^{\pi} |t| K_n(t) dt$, temos

$$\begin{aligned} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |t| K_n(t) dt \right]^2 &= \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [t^2 K_n(t)]^{1/2} [K_n(t)]^{1/2} dt \right\}^2 \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt \int_{-\pi}^{\pi} t^2 K_n(t) dt \\ &= \pi \int_{-\pi}^{\pi} t^2 K_n(t) dt. \end{aligned}$$

Como $-\pi \leq t \leq \pi$ temos que

$$\left(\frac{t}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \left(\sin \frac{t}{2} \right)^2,$$

pois,

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$

então

$$\left(\frac{t}{2} \right)^2 \leq \frac{\pi^2}{4} \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{\pi^2}{4} \frac{1 - \cos t}{2},$$

logo,

$$t^2 \leq \frac{\pi^2(1 - \cos t)}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |t| K_n(t) dt \right)^2 &\leq \pi \pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos t}{2} K_n(t) dt \\ &= \frac{\pi^4}{2} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos t K_n(t) dt \right\} \\ &= \frac{\pi^4}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \left(\frac{1}{2} + \rho_{1,n} \cos t \right) dt \right\} \\ &= \frac{\pi^4}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\cos t}{2} + \rho_{1,n} \cos^2 t \right) dt \right\} \\ &= \frac{\pi^4}{2} \left\{ 1 - \underbrace{\frac{1}{2\pi} \sin t \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_{1,n} \cos^2 t dt \right\} \\ &= \frac{\pi^4}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_{1,n} \cos^2 t dt \right\} \end{aligned}$$

Como,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_{1,n} \cos^2 t \, dt = \rho_{1,n},$$

Temos

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |t| K_n(t) dt \right)^2 = \frac{\pi^4}{2} \{1 - \rho_{1,n}\}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |f(\theta) - q_n f(\theta)| &\leq w\left(f; \frac{1}{n}\right) \left\{ 1 + \frac{n}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \rho_{1,n}} \right) \right\} \\ &= w\left(f; \frac{1}{n}\right) \left\{ 1 + \frac{n\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \rho_{1,n}} \right\} \end{aligned}$$

■

Lema 34 *Seja $Q(z) \in \pi_n(\mathcal{C})$ (espaço dos polinômios de grau n com coeficientes complexos). Então $\tau_n(\theta) = |Q(e^{i\theta})|^2$ é um polinômio trigonométrico de ordem n com coeficientes reais não negativos. Além disso,*

$$Q(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k,$$

onde $c_k \in \mathbb{R}$, então

$$\frac{\tau_n(\theta)}{2} = \frac{\rho_0}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_k \cos k\theta,$$

com

$$\begin{cases} \rho_0 &= c_0^2 + \dots + c_n^2 \\ \rho_1 &= c_0 c_1 + c_1 c_2 + \dots + c_{n-1} c_n \\ &\vdots \\ \rho_k &= c_0 c_k + c_1 c_{k+1} + \dots + c_{n-k} c_n \\ &\vdots \\ \rho_n &= c_0 c_n \end{cases}$$

Demonstração. É óbvio que $\tau_n(\theta)$ é não negativo, pois $\tau_n(\theta) = |Q(e^{i\theta})|^2$.

Como, para $\xi \in \mathcal{C}$, $|\xi|^2 = \xi \bar{\xi}$, temos

$$\begin{aligned} \tau_n(\theta) &= Q(e^{i\theta}) \overline{Q(e^{i\theta})} \\ &= (c_0 + c_1 e^{i\theta} + c_2 e^{2i\theta} + c_3 e^{3i\theta} + \dots + c_{n-1} e^{(n-1)i\theta} + c_n e^{ni\theta}) \\ &\quad (\bar{c}_0 + \bar{c}_1 e^{-i\theta} + \bar{c}_2 e^{-2i\theta} + \bar{c}_3 e^{-3i\theta} + \dots + \bar{c}_{n-1} e^{-(n-1)i\theta} + \bar{c}_n e^{-ni\theta}) \end{aligned}$$

onde $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$. Então

$$\begin{aligned}
 \tau_n(\theta) &= c_0 \bar{c}_0 + c_1 \bar{c}_1 + \dots + c_n \bar{c}_n \\
 &\quad + (\bar{c}_0 c_1 + \bar{c}_1 c_2 + \dots + \bar{c}_{n-1} c_n) e^{i\theta} + (c_0 \bar{c}_1 + \dots + c_{n-1} \bar{c}_n) e^{-i\theta} \\
 &\quad + (\bar{c}_0 c_2 + \bar{c}_1 c_3 + \dots + \bar{c}_{n-2} c_n) e^{2i\theta} + (c_0 \bar{c}_2 + \dots + c_{n-2} \bar{c}_n) e^{-2i\theta} + \dots \\
 &\quad + (\bar{c}_0 c_k + \bar{c}_1 c_{k+1} + \dots + \bar{c}_{n-k} c_n) e^{ki\theta} + (c_0 \bar{c}_k + \dots + c_{n-k} \bar{c}_n) e^{-ki\theta} + \dots \\
 &\quad + \bar{c}_0 c_n e^{ni\theta} + c_0 \bar{c}_n e^{-ni\theta} \\
 &= |c_0|^2 + |c_1|^2 + \dots + |c_n|^2 \\
 &\quad + (\bar{c}_0 c_1 + c_0 \bar{c}_1 + \dots + \bar{c}_{n-1} c_n + c_{n-1} \bar{c}_n) \cos \theta \\
 &\quad + i[(\bar{c}_0 c_1 - c_0 \bar{c}_1) + \dots + (\bar{c}_{n-1} c_n - c_{n-1} \bar{c}_n)] \sin \theta + \dots \\
 &\quad + (\bar{c}_0 c_k + c_0 \bar{c}_k + \dots + \bar{c}_{n-k} c_n + c_{n-k} \bar{c}_n) \cos k\theta \\
 &\quad + i[(\bar{c}_0 c_k - c_0 \bar{c}_k) + \dots + \bar{c}_{n-k} c_n - c_{n-k} \bar{c}_n] \sin k\theta + \dots \\
 &\quad + (\bar{c}_0 c_n + c_0 \bar{c}_n) \cos n\theta \\
 &\quad + i(\bar{c}_0 c_n - c_0 \bar{c}_n) \sin n\theta
 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{cases} \xi + \bar{\xi} = 2 \operatorname{Re} \xi, & \text{pois } (a + ib) + (a - ib) = 2a \\ i(\xi - \bar{\xi}) = -2 \operatorname{Im} \xi, & \text{pois } i(a + ib - a - ib) = 2i^2 b = -2b \end{cases}$$

Temos

$$\begin{aligned}
 \tau_n(\theta) &= |c_0|^2 + |c_1|^2 + \dots + |c_n|^2 \\
 &\quad + (2c_0 c_1 + \dots + 2c_{n-1} c_n) \cos \theta + \underbrace{0}_{c_k \in \mathbb{R}} + \dots \\
 &\quad + (2c_0 c_k + \dots + 2c_{n-k} c_n) \cos k\theta + \underbrace{0}_{c_k \in \mathbb{R}} + \dots \\
 &\quad + (2c_0 c_n) \cos n\theta + \underbrace{0}_{c_k \in \mathbb{R}} \\
 &= \rho_0 + 2\rho_1 \cos \theta + \dots + 2\rho_k \cos k\theta + \dots + 2\rho_n \cos n\theta \\
 &= 2 \left(\frac{\rho_0}{2} + \rho_1 \cos \theta + \dots + \rho_k \cos k\theta + \dots + \rho_n \cos n\theta \right) \\
 &= 2 \left(\frac{\rho_0}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_k \cos k\theta \right)
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{\tau_n(\theta)}{2} = \frac{\rho_0}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_k \cos k\theta.$$

■

Notamos a partir desse último resultado que $K_n(t)$ será igual a $\tau_n(\theta)/2$ quando $\rho_0 = 1$, então tomando

$$c_k = c \sin \left(\frac{k+1}{n+2} \pi \right), \quad k = 0, \dots, n$$

temos que

$$\rho_0 = c_0^2 + \dots + c_n^2 = c^2 \sum_{k=0}^n \left(\sin \frac{k+1}{n+2} \pi \right)^2.$$

E fazendo $\rho_0 = 1$, temos que

$$c^2 \sum_{k=0}^n \left(\sin \frac{k+1}{n+2} \pi \right)^2 = 1,$$

o que implica que

$$c^2 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \left(\sin \frac{k+1}{n+2} \pi \right)^2}.$$

Calculemos agora ρ_1

$$\begin{aligned} \rho_1 &= c_0 c_1 + \dots + c_{n-1} c_n \\ &= c^2 \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{k+1} \\ &= c^2 \sum_{k=0}^n \sin \left(\frac{k+1}{n+2} \pi \right) \sin \left(\frac{k+2}{n+2} \pi \right) \end{aligned}$$

pois, para todo n teremos

$$\sin \left(\frac{n+1}{n+2} \pi \right) \sin \left(\frac{n+2}{n+2} \pi \right) = 0.$$

Seja $k+1 = j$, então

$$\begin{aligned} \rho_1 &= c^2 \sum_{j=1}^{n+1} \sin \left(\frac{j}{n+2} \pi \right) \sin \left(\frac{j+1}{n+2} \pi \right) \\ &= c^2 \sum_{j=0}^n \sin \left(\frac{j}{n+2} \pi \right) \sin \left(\frac{j+1}{n+2} \pi \right) \end{aligned}$$

Tomemos

$$S = \sum_{j=0}^n \sin j \sin(j+1) \quad \text{e} \quad S = \sum_{j=0}^n \sin(j+2) \sin(j+1)$$

Então

$$2S = \sum_{j=0}^n \sin j \sin(j+1) + \sum_{j=0}^n \sin(j+2) \sin(j+1).$$

Logo

$$S = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n [\sin j + \sin(j+2)] \sin(j+1)$$

e

$$\rho_1 = \frac{c^2}{2} \sum_{j=0}^n \left[\sin \frac{j\pi}{n+2} + \sin \frac{(j+2)\pi}{n+2} \right] \sin \frac{(j+1)\pi}{n+2}.$$

Usando

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2} = \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2},$$

teremos

$$\begin{aligned} \rho_1 &= c^2 \sum_{j=0}^n \cos \frac{\pi}{n+2} \sin^2 \frac{(j+1)\pi}{n+2} \\ &= \cos \frac{\pi}{n+2} \underbrace{c^2 \sum_{j=0}^n \sin^2 \frac{(j+1)\pi}{n+2}}_{\text{fazendo } j = k, \rho_0 = 1} \\ &= \cos \frac{\pi}{n+2} \end{aligned}$$

■

Lema 35 *Existe um polinômio cosseno não negativo*

$$U_n^*(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_k \cos k\theta$$

com $\rho_1 = \cos \frac{\pi}{n+2}$.

Demonstração. Temos que

$$U_n^*(\theta) = \rho_0 + \rho_1 \cos \theta + \rho_2 \cos 2\theta + \dots + \rho_n \cos n\theta,$$

onde $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{R}$ e, pelo Lema 34 satisfazem

$$\rho_0 = c_0^2 + c_1^2 + \dots + c_n^2 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \rho_1 = c_0 c_1 + c_1 c_2 + \dots + c_{n-1} c_n.$$

Consideremos

$$c^T = (c_0, c_1, \dots, c_n) \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \langle c, c \rangle &= c^T c \\ &= c_0^2 + c_1^2 + \dots + c_n^2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e,} \quad \langle c, Ac \rangle &= c^T Ac \\ &= (c_0, c_1, \dots, c_n) \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\ &= (c_0, c_1, \dots, c_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 + c_2 \\ \vdots \\ c_{n-2} + c_n \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= 2(c_0 c_1 + c_1 c_2 + \dots + c_{n-1} c_n). \end{aligned}$$

Sabemos que o valor máximo de $\langle c, Ac \rangle$ onde $\langle c, c \rangle = 1/2$ é dado por

$$\max_{\langle c, c \rangle = 1/2} \langle c, Ac \rangle = \lambda_n$$

onde λ_n é o maior autovalor de A . Para sabermos o valor de λ_n , precisamos encontrar o polinômio característico da matriz A , que é dado por

$$p_{n+1}(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}$$

Mas,

$$p_{n+1}(-\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix} = q_{n+1}(\lambda).$$

Então, temos a seguinte relação de recorrência

$$q_{n+1}(\lambda) = 2\lambda q_n(\lambda) - q_{n-1}(\lambda)$$

onde $q_1(\lambda) = \lambda$ e $q_2(\lambda) = 4\lambda^2 - 1$.

Nessas condições, temos que

$$q_{n+1}(\lambda) = U_{n+1}(\lambda)$$

onde $U_{n+1}(\lambda)$ são os polinômios de Chebyshev de Segunda Espécie e

$$U_{n+1}(\lambda) = 2\lambda U_n(\lambda) - U_{n-1}(\lambda)$$

com

$$\begin{cases} U_0(\lambda) &= 1, \\ U_1(\lambda) &= 2\lambda, \\ U_2(\lambda) &= 4\lambda^2 - 1. \end{cases}$$

cujas raízes são

$$\lambda_{n,k} = \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Assim, as raízes λ_k de $q_n(\lambda)$ são $\lambda_k = \cos(k\pi)/(n+1)$ e como $q_n(\lambda) = p_n(-\lambda)$ e as raízes de $q_n(\lambda)$ são simétricas com relação a origem, as raízes de $q_n(\lambda)$ e $p_n(-\lambda)$ coincidem. Daí

$$\begin{aligned} \max_{<c,c>=1/2} &= \lambda_n \\ &= \cos \frac{k\pi}{n+1}. \end{aligned}$$

■

E finalmente, obtemos

Teorema 34 (Teorema de Jackson) *Para*

$$q_n^*(f; \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t + \theta) U_n^*(t) dt,$$

onde

$$U_n^*(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_k \cos k\theta$$

temos

$$|f(\theta) - q_n^*(f; \theta)| \leq 6w\left(f; \frac{1}{n}\right).$$

Demonstração. Pelo Lema 33, temos que

$$|f(\theta) - q_n^*(f; \theta)| \leq A_n w\left(f; \frac{1}{n}\right),$$

onde

$$A_n = 1 + \frac{n\pi}{\sqrt{2}} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n+2}\right)^{1/2}.$$

Temos que

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Assim,

$$A_n = 1 + \frac{n\pi}{\sqrt{2}} \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{2n+4}\right)^{1/2} = 1 + \frac{n\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2n+4}.$$

Mas sabemos que $\frac{\sin x}{x} \leq 1$ então $\sin x \leq x$, logo $\sin \pi \leq \pi$. Daí

$$\begin{aligned} A_n &\leq 1 + \frac{n\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \frac{\pi}{2(n+2)} \\ &= 1 + \frac{n\pi}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{\sqrt{2}(n+2)} \\ &= 1 + \frac{n\pi^2}{2(n+2)} \\ &\leq 1 + \frac{\pi^2}{2} \\ &\leq 6. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|f(\theta) - q_n^*(f; \theta)| \leq 6w\left(f; \frac{1}{n}\right).$$

■

Capítulo 4

Polinômios Ortogonais

Daqui em diante precisaremos de várias propriedades dos polinômios ortogonais. Por esta razão, forneceremos algumas informações preliminares sobre eles.

Sejam $[a, b]$ um intervalo dado, finito ou infinito, e $\mu(x)$ uma função definida e não-negativa em $[a, b]$. Vamos supor que

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mu(x) dx > 0,$$

para qualquer subintervalo $[\alpha, \beta]$ de $[a, b]$. Toda função $\mu(x)$ que satisfaz essa propriedade é chamada de *função peso* em $[a, b]$.

O produto interno $\langle f, g \rangle$ de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ é definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\mu(x) dx.$$

É claro que estamos supondo que f e g são definidas em $[a, b]$ e que a integral acima existe.

Definição 14 *As funções $f(x)$ e $g(x)$ são ortogonais em $[a, b]$ com relação à função peso $\mu(x)$ se $\langle f, g \rangle = 0$.*

Definição 15 *Dizemos que $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots$ é uma sequência de polinômios ortogonais em $[a, b]$ relativamente à função peso $\mu(x)$ se*

$$a) \quad P_i \in \pi_i, \quad \forall i,$$

$$b) \quad \langle P_i, P_i \rangle \neq 0, \quad \forall i,$$

$$c) \quad \langle P_i, P_j \rangle = 0 \quad \text{para } i \neq j.$$

Destaquemos algumas propriedades dos polinômios ortogonais.

Teorema 35 *Toda subsequência finita $P_0(x), \dots, P_n(x)$ de*

$$P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots$$

é um sistema de funções linearmente independentes.

Demonstração. Supomos o contrário. Então, existem um número n e coeficientes $a_0, \dots, a_n$, com pelo menos um deles diferente de zero, tais que o polinômio $f(x) = a_0P_0(x) + \dots + a_nP_n(x)$ é identicamente nulo. Então,

$$\langle f, P_i \rangle = 0 \quad \text{para todo } i. \quad (4.0.1)$$

Por outro lado,

$$\langle f, P_i \rangle = \sum_{k=0}^n a_k \langle P_k, P_i \rangle = a_i \langle P_i, P_i \rangle$$

e pelo menos um dos coeficientes $a_0, \dots, a_n$ é diferente de zero. Isto, junto com a condição b) leva a uma contradição com (4.0.1). ■

Corolário 16 *Se o $f(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a n , então f pode ser unicamente representada por*

$$f(x) = a_0P_0(x) + \dots + a_nP_n(x)$$

com coeficientes reais $a_0, \dots, a_n$.

Isto é uma simples consequência da teorema 35. Desde que π_n é o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a n e $P_0, \dots, P_n$ são $n+1$ elementos linearmente independentes de π_n , então cada elemento de π_n pode ser representado como combinação linear desses $n+1$ elementos. É fácil obter as expressões explícitas para a_k , $k = 0, \dots, n$. De fato, temos

$$\begin{aligned}
\langle f, P_k \rangle &= a_0 \langle P_0, P_k \rangle + \cdots + a_k \langle P_k, P_k \rangle + \cdots + a_n \langle P_n, P_k \rangle \\
&= a_k \langle P_k, P_k \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$a_k = \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle}.$$

Vale a pena mencionar também que as condições da definição 15 implicam que $P_n(x)$ é um polinômio algébrico de grau exatamente n , isto é, $P_n(x)$ é da forma

$$P_n(x) = \alpha_n x^n + q(x), \quad q(x) \in \pi_{n-1}, \quad (4.0.2)$$

onde $\alpha_n \neq 0$. Suponhamos o contrário. Então, $P_n \in \pi_{n-1}$ e, de acordo com o corolário 16, $P_n(x)$ pode ser escrito da forma

$$P_n(x) = a_0 P_0(x) + \cdots + a_{n-1} P_{n-1}(x)$$

com constantes $a_0, \dots, a_{n-1}$. Mas, esta relação significa que $P_0, \dots, P_n$ são linearmente dependentes, o que contradiz o teorema 35.

Teorema 36 *Seja $f(x)$ um polinômio arbitrário de grau menor ou igual a $n - 1$. Então,*

$$\langle f, P_n \rangle = 0.$$

Demonstração. Desde que $f \in \pi_{n-1}$, pelo corolário 16

$$f(x) = a_0 P_0(x) + \cdots + a_{n-1} P_{n-1}(x).$$

Portanto, pela Propriedade c) da definição 15

$$\langle f, P_n \rangle = a_0 \langle P_0, P_n \rangle + \cdots + a_{n-1} \langle P_{n-1}, P_n \rangle = 0.$$

■

Teorema 37 *Para todo número natural n , o polinômio $P_n(x)$ tem n zeros distintos que pertencem ao intervalo aberto (a, b) .*

Demonstração. Suponhamos que o polinômio $P_n(x)$ tem somente k mudanças de sinal em (a, b) e $k < n$. Sejam $\{\xi_i\}_{i=1}^k$, $a < \xi_1 < \dots < \xi_k < b$, os pontos onde $P_n(x)$ muda de sinal. Escolhemos um ponto arbitrário t do intervalo (ξ_k, b) onde $P_n(t) \neq 0$ e construiremos o polinômio

$$Q(x) = P_n(t)(x - \xi_1) \dots (x - \xi_k).$$

Obviamente $Q(x)P_n(x)$ é um polinômio algébrico que não é identicamente nulo e $Q(x)P_n(x) \geq 0$ em $[a, b]$. Consequentemente,

$$\langle Q, P_n \rangle = \int_a^b Q(x)P_n(x)\mu(x) dx > 0.$$

Por outro lado $Q \in \pi_{n-1}$ pois $k < n$ então pelo teorema 36, $\langle Q, P_n \rangle = 0$. Assim temos uma contradição. Consequentemente, $k \geq n$.

Desde que $P_n(x)$ muda de sinal em ξ_i , $i = 1, \dots, k$, então $\xi_1, \dots, \xi_k$ são zeros de $P_n(x)$. Mas, $P_n \in \pi_n$. Então, de acordo com o teorema fundamental da álgebra, $P_n(x)$ tem no máximo n zeros reais em (a, b) . Consequentemente, k é exatamente n , isto é, $\xi_1, \dots, \xi_n$ são todos os zeros de $P_n(x)$ que pertencem ao intervalo (a, b) e são distintos. ■

Teorema 38 *Todo sistema de polinômios ortogonais*

$$P_0(x), P_1(x), \dots$$

satisfaz uma relação de recorrência de três termos da forma

$$P_{n+1}(x) = (A_{n+1}x - B_{n+1})P_n(x) + C_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.0.3)$$

onde A_{n+1} , B_{n+1} , C_{n+1} são constantes reais.

Demonstração. Temos que $P_n(x) = a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \dots + a_{n,1}x + a_{n,0}$. Podemos escrever

$$xP_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i P_i(x)$$

se igualarmos os coeficientes dos termos de maior grau em ambos os membros da igualdade acima, teremos

$$a_{n,n} = b_{n+1}a_{n+1,n+1}.$$

Daí,

$$b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}.$$

Porém

$$\langle xP_n, P_j \rangle = \int_a^b P_n(x)[xP_j(x)]\mu(x)dx = 0 \quad \text{para } j \leq n-2.$$

Mas,

$$\langle xP_n, P_j \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} b_i \langle P_i, P_j \rangle = b_j \langle P_j, P_j \rangle = 0 \quad \text{para } j \leq n-2.$$

Daí, $b_j = 0$, para $j \leq n-2$. Assim

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{b_{n+1}}xP_n(x) - \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}P_{n-1}(x) - \frac{b_n}{b_{n+1}}P_n(x).$$

Comparando com a relação (4.0.3), temos

$$A_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}}, \quad B_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+1}} \quad \text{e} \quad C_{n+1} = \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}$$

Como $b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}$ temos que

$$A_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}.$$

Calcularemos agora os valores de B_{n+1} e C_{n+1} .

Da relação (4.0.3), obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \langle P_{n+1}, P_n \rangle &= A_{n+1} \langle xP_n, P_n \rangle - B_{n+1} \langle P_n, P_n \rangle \\ &\quad - C_{n+1} \langle P_{n-1}, P_n \rangle. \end{aligned}$$

Daí

$$B_{n+1} = A_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}.$$

Do mesmo modo

$$0 = \langle P_{n+1}, P_{n-1} \rangle = A_{n+1} \langle xP_n, P_{n-1} \rangle - B_{n+1} \langle P_n, P_{n-1} \rangle - C_{n+1} \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle.$$

Logo

$$C_{n+1} = A_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

Mas, fazendo $n = n - 1$ na relação (4.0.3), obtemos

$$xP_{n-1}(x) = \frac{1}{A_n}P_n(x) + \frac{B_n}{A_n}P_{n-1} + \frac{C_n}{A_n}P_{n-2}(x).$$

Como

$$\langle xP_n, P_{n-1} \rangle = \int_a^b P_n(x)[xP_{n-1}(x)]\mu(x)dx = \langle P_n, xP_{n-1} \rangle.$$

Temos

$$\begin{aligned} \langle P_n, xP_{n-1} \rangle &= \frac{1}{A_n} \langle P_n, P_n \rangle + \frac{B_n}{A_n} \langle P_n, P_{n-1} \rangle \\ &\quad + \frac{C_n}{A_n} \langle P_n, P_{n-2} \rangle \\ &= \frac{1}{A_n} \langle P_n, P_n \rangle. \end{aligned}$$

Portanto

$$C_{n+1} = \frac{A_{n+1}}{A_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

Concluimos que os polinômios ortogonais satisfazem a relação de recorrência de três termos (4.0.3) e que os coeficientes da relação são dados por

$$A_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad B_{n+1} = A_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}$$

$$\text{e } C_{n+1} = \frac{A_{n+1}}{A_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \neq 0.$$

■

Teorema 39 Para o polinômio ortogonal $P_n(x)$ com relação à função peso $\mu(x)$ no intervalo $[a, b]$ e para cada polinômio $Q_n(x) \in \pi_n$ com o mesmo coeficiente do termos de maior grau que $P_n(x)$, vale a desigualdade

$$\int_a^b P_n^2(x) \mu(x) dx \leq \int_a^b Q_n^2(x) \mu(x) dx,$$

Além disso, a igualdade é atingida somente quando $P_n(x) \equiv Q_n(x)$.

Demonstração. De acordo com as hipóteses, temos

$$P_n(x) = \alpha_n x^n + q_{n-1}(x)$$

$$Q_n(x) = \alpha_n x^n + r_{n-1}(x),$$

onde $\alpha_n \neq 0$ e $q_{n-1}, r_{n-1} \in \pi_{n-1}$. Então,

$$\begin{aligned} \int_a^b Q_n^2(x) \mu(x) dx &= \int_a^b [\alpha_n x^n + r_{n-1}(x)]^2 \mu(x) dx \\ &= \int_a^b [P_n(x) + r_{n-1}(x) - q_{n-1}(x)]^2 \mu(x) dx \\ &= \int_a^b P_n^2(x) \mu(x) dx \\ &\quad + 2 \int_a^b P_n(x) [r_{n-1}(x) - q_{n-1}(x)] \mu(x) dx \\ &\quad + \int_a^b [r_{n-1}(x) - q_{n-1}(x)]^2 \mu(x) dx. \end{aligned}$$

Desde que $(r_{n-1} - q_{n-1}) \in \pi_{n-1}$, pela ortogonalidade

$$\int_a^b P_n(x) [r_{n-1}(x) - q_{n-1}(x)] \mu(x) dx = 0.$$

Então, obtemos

$$\int_a^b Q_n^2(x) \mu(x) dx - \int_a^b P_n^2(x) \mu(x) dx \geq 0,$$

onde a igualdade é possível somente quando $r_{n-1}(x) \equiv q_{n-1}(x)$, isto é, quando $Q_n(x) \equiv P_n(x)$.

■

Finalmente, esclarecemos a questão fundamental da existência e, eventualmente da construção de seqüências de polinômios ortogonais para um intervalo $[a, b]$ e uma função peso $\mu(x)$ dados. Sejam $[a, b]$ um intervalo arbitrário e $\mu(x)$ uma função peso qualquer em $[a, b]$. Vamos exigir que $\mu(x)$ satisfaça à condição adicional

$$\int_a^b x^k \mu(x) dx < \infty, \quad k = 0, 1, \dots,$$

caso o intervalo $[a, b]$ seja infinito. Para construir uma seqüência de polinômios ortogonais, podemos executar o seguinte esquema

1. Escolhemos uma seqüência qualquer de números $\alpha_0, \alpha_1, \dots$, todos diferentes de zero. Eles serão os coeficientes de x^n em $P_n(x)$, respectivamente, para $n = 0, 1, \dots$. Consequentemente, $P_0(x) \equiv \alpha_0$.
2. Para $n = 1, 2, \dots$, construimos o polinômio

$$P_n(x) = \alpha_n x^n + q_{n-1}(x),$$

onde $q_{n-1}(x) \in \pi_{n-1}$, de modo que satisfaça às condições

$$\langle P_n, P_i \rangle = 0, \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (4.0.4)$$

Evidentemente as condições (40) serão satisfeitas se $\langle P_n, f \rangle = 0$ para todo $f \in \pi_{n-1}$. Consequentemente, o problema reduz-se à construção do polinômio $P_n(x)$ de grau n com coeficiente α_n , de x^n fixo que é ortogonal a todos os polinômios do espaço π_{n-1} . Este problema é de interesse independente e por isto vamos tratá-lo em um teorema separado.

Teorema 40 *Para um intervalo $[a, b]$, uma função peso $\mu(x)$ e um coeficiente α_n dados, existe um único polinômio da forma*

$$P_n(x) = \alpha_n x^n + q_{n-1}, \quad q_{n-1} \in \pi_{n-1},$$

que é ortogonal a todo polinômio de grau menor ou igual a $n-1$.

Demonstração. Aplicando indução em n . Para $n = 0$ o polinômio $P_0(x)$ é unicamente determinado pela condição $P_0(x) = \alpha_0$.

Suponhamos que já determinamos, unicamente, $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$. Desde que eles formam um sistema de polinômios ortogonais, todo polinômio de grau $n-1$ pode ser representado como combinação linear deles. Consequentemente, $P_n(x)$ pode ser escrito da forma

$$P_n(x) = \alpha_n x^n + b_{n-1} P_{n-1}(x) + \dots + b_0 P_0(x).$$

Pelas condições de ortogonalidade da definição (15), obtemos

$$\langle P_n, P_i \rangle = \alpha_n \langle x^n, P_i \rangle + b_i \langle P_i, P_i \rangle,$$

e, por esta igualdade, para um dado α_n , os coeficientes b_i podem ser unicamente determinados.

Então, para um intervalo $[a, b]$, uma função peso $\mu(x)$ e coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \dots$, para as maiores potências das variáveis, existe um único sistema de polinômios ortogonais. ■

Exemplo 8 *Provar que os polinômios*

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

formam um sistema ortogonal em $[-1, 1]$ com relação à função peso $\mu(x) \equiv 1$.

Resolução Temos que verificar as condições da definição 15. Obviamente $(x^2 - 1)^n$ é um polinômio de grau exatamente $2n$. Consequentemente, sua n -ésima derivada é um polinômio de grau exatamente n . Isto implica que *a)* e *b)* estão satisfeitas. Basta provar *c)*. Para isso, mostraremos que

$$\int_{-1}^1 L_n(x) f(x) dx = 0$$

para todo polinômio $f \in \pi_{n-1}$. De fato, denotando a função $\frac{1}{2^n n!} (x^2 - 1)^n$ por $\varphi(x)$ e integrando repetidamente por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 L_n(x) f(x) dx &= \int_{-1}^1 f(x) \varphi^{(n)}(x) dx \\
&= \int_{-1}^1 f(x) d\varphi^{(n-1)}(x) \\
&= f(x) \varphi^{(n-1)}(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f'(x) \varphi^{(n-1)}(x) dx \\
&\vdots \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} f^{(k-1)}(x) \varphi^{(n-k)}(x) \Big|_{-1}^1 + (-1)^n \int_{-1}^1 f^{(n)}(x) \varphi(x) dx.
\end{aligned}$$

Esta última expressão é igual a zero pois $f^{(n)}(x) \equiv 0$ e $\varphi^{(n-k)}(x)$ é zero nos pontos $x = \pm 1$ para $k = 1, \dots, n$.

Os polinômios $L_n(x)$ são chamados *polinômios de Legendre*.

O coeficiente $\frac{1}{2^n n!}$ é escolhido para que seja satisfeita a condição

$$L_n(1) = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

■

Problema 1 *Mostrar que os polinômios de Chebyshev de primeira espécie*

$$T_n(x) = \cos n \arccos x$$

são ortogonais em $[-1, 1]$ com relação à função peso $\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Problema 2 *Mostrar que os polinômios de Chebyshev de segunda espécie*

$$U_n(x) := T'_{n+1}(x)$$

são ortogonais em $[-1, 1]$ relativamente à função peso $\mu(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Os polinômios de Legendre são um caso especial dos polinômios de Jacobi $\{P_n^{(\alpha, \beta)}\}$, que são ortogonais em $[-1, 1]$ com relação à função peso $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, para $\alpha, \beta > -1$ e são definidos, através da fórmula de Rodrigues, por

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \{(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}\}.$$