Análise Funcional Aplicada

Dimitar K. Dimitrov

Preface

Contents

Capítulo 1

Álgebra dos Conjuntos

1.1 Álgebra dos Conjuntos

Definição 1.1.1. *Dizemos que* $A \subset B$ *ou* $B \supset A$ *se* $\forall\, x \in A \Rightarrow x \in B$.

Definição 1.1.2. *Dizemos que* $A = B$ *se* $A \subset B$ *e* $A \supset B$ *simultaneamente e, dizemos que* $A \neq B$ *se existe* $x \in A$ *tal que* $x \notin B$ *ou existe* $x \in B$ *tal que* $x \notin A$.

Definição 1.1.3. *Dizemos que* $A \subsetneq B$ *se* $A \subset B$ *mas* $A \neq B$.

Definição 1.1.4. *A união dos conjuntos* A *e* B *é definida por*

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Se Ω *é uma família de conjuntos* A*, definimos:*

$$\bigcup \Omega = \{x : x \in A \text{ para algum } A \in \Omega\},$$

ou

$$\bigcup_{\iota \in I} A_\iota = \{x : x \in A_\iota \text{ para algum } \iota \in I\}.$$

Definição 1.1.5. *Definimos* $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.
Seja Ω *uma família de conjuntos* A*. Definimos:*

$$\bigcap \Omega = \{x : x \in A \text{ para todo } A \in \Omega\},$$

$$\bigcap_{\iota \in I} A_\iota = \{x : x \in A_\iota \text{ para todo } \iota \in I\}.$$

Problema 1.1.1. *Provar que se* $A_n = \{x \in \mathbb{R} : |x| < \frac{1}{n}\}$ *então* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$.

Teorema 1.1.1. *Sejam A, B e C alguns conjuntos. Então:*

1) $A \cup B = B \cup A$	1') $A \cap B = B \cap A$
2) $A \cup A = A$	2') $A \cap A = A$
3) $A \cup \emptyset = A$	3') $A \cap \emptyset = \emptyset$
4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	4') $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
5) $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$	5') $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$
6) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$	6') $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

Demonstração: Provaremos somente as afirmações 6) e 6').
6) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
($\Rightarrow$) Pela hipótese $A \subset B$, ou seja, $\forall\ x \in A \Rightarrow x \in B$. Temos que provar que $A \cup B = B$, ou seja, $A \cup B \subset B\ \wedge\ A \cup B \supset B$.

Primeiramente provemos a inclusão [$\subset$]. Seja $x \in A\ \cup B$. Pela definição de união, temos que $x \in A$ ou $x \in B$. Mas pela hipótese, se $x \in A$, então $x \in B$. Portanto, $A \cup B \subset B$.

A inclusão [$\supset$], isto é, que $A \cup B \supset B$. é logicamente óbvia.
($\Leftarrow$) Por hipótese $A \cup B = B$, ou seja, $\forall\ x \in A \cup B \Rightarrow x \in B$. Em particular, se $x \in A$, então $x \in B$, o que implica em $A \cup B = B$.

6') $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
($\Rightarrow$) A inclusão [$\subset$] é verdadeira pelo item 5').
Provemos a inclusão [$\supset$], ou seja, $A \cap B \supset A$. Temos que todo elemento de A é elemento de B, então $\forall x \in A \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$, o que implica $x \in A \cap B$. Assim, $A \subset A \cap B$ e, portanto, $A \cap B = A$.
($\Leftarrow$) Temos por hipótese que todo elemento de A é elemento de $A \cap B$. Assim, todo elemento de A é elemento de B, o que implica em $A \subset B$. •

Teorema 1.1.2. *Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Então:*

$$1) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$2) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Demonstração: 1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Temos que estabelecer as duas inclusões.
[$\subset$] Seja $x \in A \cap (B \cup C)$ um elemento arbitrário. Logicamente, isto significa que $x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$ o que, por sua vez, implica em $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$. Consequentemente, $x \in A \cap B \vee x \in A \cap C$ o que é equivalente a $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Portanto, $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
[$\supset$] Seja agora $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Então, $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$. Logo, $x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$. Consequentemente $x \in A \cap (B \cup C)$. Portanto,

$A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Primeiro provemos a inclusão $[\subset]$. Tome $x \in A \cup (B \cap C)$ um elemento qualquer. Então $x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$, o que implica em $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$. Assim, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Agora, provemos a inclusão $[\supset]$. Tome $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Então,
$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$, o que significa que $x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$. Portanto, $x \in A \cup (B \cap C)$. Logo, como $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $A \cup (B \cap C) \supset (A \cup B) \cap (A \cup C)$, temos que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.$\bullet$

Definição 1.1.6. *Seja X um conjunto fixo. O complemento de A (com respeito a X) é dado por:*

$$A^c = X \backslash A = \{x : x \in X \wedge x \notin A\}.$$

Teorema 1.1.3. *As seguintes leis de De Morgan são válidas:*

$$\begin{array}{ll} 1) & (A \cup B)^c = A^c \cap B^c; \\ 2) & (A \cap B)^c = A^c \cup B^c; \\ 3) & (\bigcup\limits_{\iota \in I} A_\iota)^c = \bigcap\limits_{\iota \in I} A_\iota^c; \\ 4) & (\bigcap\limits_{\iota \in I} A_\iota)^c = \bigcup\limits_{\iota \in I} A_\iota^c. \end{array}$$

Definição 1.1.7. *A diferença simétrica dos conjuntos A e B é dada por:*

$$A \triangle B = \{x \ : \ x \in A \cup B \ \wedge \ x \notin A \cap B\}.$$

Teorema 1.1.4. *Para quaisquer conjuntos A e B temos:*

$$\begin{array}{ll} 1) & A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B); \\ 2) & A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A); \\ 3) & A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B). \end{array}$$

Problema 1.1.2. *Sejam X e Y dois conjuntos. Provar que $X = \emptyset$ se, e somente se, $Y = X \triangle Y$.*

Problema 1.1.3. *Provar que*

$$\begin{array}{ll} 1) & A \triangle B = B \triangle A; \\ 2) & A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C; \\ 3) & A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C); \\ 4) & A \triangle A = \emptyset; \\ 5) & A \triangle \emptyset = A. \end{array}$$

Problema 1.1.4. *Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Provar que:*

$$A \triangle B \ \subset \ (A \triangle C) \cup (B \triangle C).$$

Quando a inclusão é estrita?

Observe o desenho para os casos $C \cap A \cap B = \emptyset$ e $C = A \cap B$.

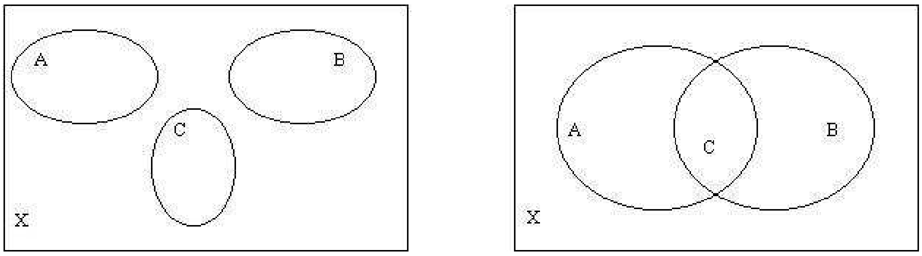

Figura 1

Problema 1.1.5. Princípio de inclusão e exclusão. *Por $\#A$ denotemos o número de elementos de um conjunto finito A. Se A e B são conjuntos com um número finito de elementos, provar que Provar que:*

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

$$\# \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \#A_i - \sum_{1 \leq i \leq j} \#(A_i \cap A_j) + \sum \#(A_i \cap A_j \cap A_k) - ...$$

1.2 Relações de Equivalência

Definição 1.2.1. *Sejam X e Y dois conjuntos. O seu Produto Cartesiano é definido por*

$$X \times Y = \{(x, y) \ : \ \ x \in X \wedge y \in Y\}.$$

Dizemos que $(x, y) = (u, v)$ quando $x = u$ e $y = v$ simultaneamente.

Definição 1.2.2. *Qualquer subconjunto $R \subset X \times Y$ é chamado relação. Os subconjuntos $Dom\ R \subset X$ e $Cod\ R \subset Y$ são definidos por*

$$Dom\ R = \{x : (x, y) \in R \text{ para algum } y\},$$
$$Cod\ R = \{y : (x, y) \in R \text{ para algum } x\},$$

e são chamados domínio e codomínio (ou contradomínio) de R, respectivamente.

Definição 1.2.3. *A relação $R \subset X \times X$ é chamado relação de equivalência se R goza das seguintes propriedades:*

1) $(x, x) \in R$, para todo $x \in X$ (reflexão);
2) $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$, para todo $x, y \in X$ (simetria);
3) $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$, para todo $x, y, z \in X$ (transitividade).

Quando R é uma relação de equivalência, em vez de $(x, y) \in R$, usaremos a denotação $x \sim y$.

Definição 1.2.4. *Se $R \subset X \times X$ é relação de equivalência e $x \in X$ então sua classe de equivalência é dada por:*

$$A_x = \{\xi \in X \ : \ (x, \xi) \in R\}.$$

As classes de equivalência A_x de x às vezes são denotadas por $\overline{x}$.

Teorema 1.2.1. *A relação $R \subset X \times X$ é uma relação de equivalência se, e somente se, R gera uma partição de X de conjuntos cuja união é X e a intersecção de quaisquer dois conjuntos distintos é vazia.*

Demonstração:
($\Rightarrow$) Seja R uma relação de equivalência. Provemos que $\cup_{x \in X} A_x = X$ e $A_x \cap A_y = \emptyset$ quando $(x, y) \notin R$. Estes dois fatos podemos resumir dizendo que

$$\bigcup_{x \in X} A_x = X, \text{ para todo } x \text{ não relacionado.}$$

Primeiramente mostremos que, se $(x, y) \in R$, então $A_x = A_y$. Para este propósito, seja $\xi \in A_x$, isto é, $(x, \xi) \in R$. Como, por hipótese, temos que $(x, y) \in R$, decorre da transitividade que $(y, \xi) \in R$, ou seja, $\xi \in A_y$ e, portanto, $A_x = A_y, \forall (x, y) \in R$.

Agora provemos que, se $(x, y) \notin R$, então $A_x \cap A_y = \emptyset$. Suponha o contrário, que existe $\xi \in A_x \cap A_y$ Portanto, $(x, \xi) \in R$ e $(y, \xi) \in R$. Logo, a transitividade implica que $(x, y) \in R$ que é uma contradição.
($\Leftarrow$) Suponha que a família dos conjuntos $\{A_\iota\}_{\iota \in I}$ forma uma partição de X, isto é, que $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota = X$ e $A_\iota \cap A_\kappa = \emptyset$ quando $\iota \neq \kappa$. Definimos a relação R através da regra:

$$(x, y) \in R \text{ se } x, y \in A_\iota \text{ para algum } \iota \in I.$$

É fácil verificar que R, definida desta forma, é uma relação de equivalência. •

Definição 1.2.5. *Sejam X e Y dois conjuntos. A relação $G \subset X \times Y$ é chamada gráfico de uma função g se, para quaisquer x, y, z, com $x \in X$, $y, z \in Y$ que satisfazem $(x, y) \in G$ e $(x, z) \in G$, necessariamente temos $y = z$. Em outras palavras, se $g(x) = y$ e $g(x) = z$, então g é função se $y = z$.*

Definição 1.2.6. *Sejam X e Y dois conjuntos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Então,*

1) *se $x_1 \neq x_2$ implica em $f(x_1) \neq f(x_2)$, ou equivalentemente, $f(x_1) = f(x_2)$ implica em $x_1 = x_2, f$ é chamada injeção;*

2) *se $f(X) = Y$, f é chamada sobrejeção;*

3) *se f é injeção e sobrejeção, ela é chamada bijeção.*

Definição 1.2.7. *Os conjuntos X e Y são equipotentes se existe uma bijeção $f : X \longrightarrow Y$.*

Problema 1.2.1. *Provar que $\mathbb{Z}$ e $2\mathbb{Z}$ são equipotentes.*

Definição 1.2.8. *O conjunto X é enumerável se ele é equipotente a $\mathbb{N}$.*

Lema 1.2.1. *Se X e Y são enumeráveis então $X \times Y$ é enumerável.*

Teorema 1.2.2. *Qualquer união enumerável de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.*

Teorema 1.2.3. *Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é monótona então o conjunto dos eventuais pontos de descontinuidade de f é no máximo enumerável.*

Problema 1.2.2. *Provar que $\mathbb{R}$ é equipotente ao intervalo (0,1).*

1.3 Relação de ordem

Definição 1.3.1. *Seja X um conjunto. A relação $R \subset X \times X$ é chamada relação de ordem (ou simplesmente ordem) se:*

1)	$(x, x) \in R$, para todo $x \in X$	(reflexão);
2)	$(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$	(transitividade);
3)	$(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R \Rightarrow x = y$	(antissimetria).

As relações de ordem são chamadas também de ordens parciais. Se R é uma relação de ordem, dizemos que (X, R), ou simplesmente X, é (parcialmente) ordenado.
Às vezes, em vez de $(x, y) \in R$, escreveremos $x \prec y$.

Definição 1.3.2. *Seja (X, R) parcialmente ordenado. Dizemos que X é linearmente ordenado e que R é ordem linear se, além das três exigências anteriores, R satisfaz a seguinte exigência adicional:*

4) Para todo $x, y \in X$ exatamente uma das inclusões $(x, y) \in R$ ou $(y, x) \in R$ vale.

Conjuntos linearmente ordenados são também chamados de "cadeias".

Exemplos:
1) Se $X = \mathbb{R}$ e R é $\geq$, então $(\mathbb{R}, \geq)$ é linearmente ordenado
2) Se em $X = \mathbb{C}$ definirmos $z_1 \prec z_2$ se $|z_1| \leq |z_2|$, esta não é uma ordem, pois não satisfaz a propriedade antissimétrica, uma vez que $|z_1| \leq |z_2|$ e $|z_2| \leq |z_1|$ implica em $|z_1| = |z_2|$, mas não implica em $z_1 = z_2$
3) Sejam Y um conjunto e $X = \mathcal{P}(Y)$ a família de todos os subconjuntos de Y. Em X podemos introduzir ordem de uma das seguintes formas:
(i) Se $U, V \in X$, dizemos que $U \prec V$ se $U \subset V$;
(ii) Se $U, V \in X$, dizemos que $U \prec V$ se $U \supset V$.
Estas são de fato ordens mas, em geral, não são ordens lineares.
4) Sejam D e Y dois conjuntos, e $X = \{f : D \to Y : f \text{ é função}\}$ a família de todas as funções de D em Y. É possível introduzir ordem em X desta forma: Dizemos que $f_1 \prec f_2$ se, e somente se, as seguintes exigências são satisfeitas simultaneamente: $Dom f_1 \subset Dom f_2$ e $f_2|_{Dom f_1} \equiv f_1$. Em outras palavras, por esta definição $f_1 \prec f_2$ se f_2 é extensão de f_1.

Definição 1.3.3. *Seja $(X, \prec)$ parcialmente ordenado. O elemento $x_0 \in X$ é chamado* elemento maximal*, no sentido da ordem, para X se não existe $y \in X$, tal que $x_0 \prec y$ e $x_0 \neq y$.*
Formalmente, x_0 é um elemento maximal se para todo $y \in X \ : \ x_0 \prec y$ então $x_0 = y$.

Analogamente, o elemento $x_0 \in X$ é chamado elemento minimal*, no sentido da ordem, para X se não existe $y \in X$, tal que $y \prec x_0$ e $y \neq x_0$*

Definição 1.3.4. *Se $x_0 \in X$ é tal que $y \prec x_0$, para todo $y \in X$, então x_0 é chamado de elemento máximo.*

De forma análoga, definimos $x_0 \in X$ como elemento mínimo se, para todo $y \in X$ temos que $x_0 \prec y$.

Exemplos:
1) Se $(X, R) = ([a, b], \leq)$, então o ponto b é elemento máximo e maximal.
2) Se $(X, R) = ((a, b), \leq)$, não existe elemento máximo nem elemento maximal, pois $b \notin X$.

Definição 1.3.5. *Seja* $(X, \prec)$ *ordenado e* $B \subset X$. *Dizemos que* $\xi \in X$ *é limite superior para* B *se* $b \prec \xi$, *para todo* $b \in B$. *O menor, no sentido da ordem, dos limites superiores para* B *é chamado de* cota superior *de* B.

Definição 1.3.6. *Seja* $(X, \prec)$ *ordenado e* $B \subset X$. *Dizemos que* $\xi \in X$ *é limite inferior para* B *se* $\xi \prec b$, *para todo* $b \in B$. *O maior, no sentido da ordem, dos limites inferiores para* B *é chamado de* cota inferior *de* B.

Axioma de Escolha. Sejam X um conjunto qualquer, A um conjunto de índices e $F: A \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ uma função que, para todo $\alpha \in A$, $F(\alpha) \neq \emptyset$. Então, existe uma função $f : A \longrightarrow X$, tal que $f(\alpha) \in F(\alpha)$ para todo $\alpha \in A$.

Em outras palavras, o Axioma de Escolha afirma que para qualquer família de conjuntos $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ não-vazios, existe uma função, que, para todo índice α "escolhe" um elemento do correspondente conjunto F_α. Por isto, f e chamada *função de escolha*.

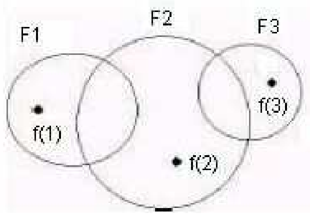

Figura 2 Axioma da Escolha

Lema de Zorn. Todo conjunto ordenado Σ tal que todos seus subconjuntos linearmente ordenados têm cota superior, possui elemento maximal.

Em outras palavras, o Lema de Zorn afirma que Σ é tal, que toda cadeia sua B possui cota ξ_B, então, Σ tem elemento maximal.

Mais adiante, mostraremos que as afirmações do Axioma da Escolha e do Lema de Zorn são equivalentes. Primeiro precisaremos introduzir o conceito de *Boa Ordenação* e apresentar o *Princípio da Indução Transfinita*.

Um conjunto parcialmente, ou linearmente, ordenado pode não ter um menor elemento e, mesmo que o tenha, algum de seus subconjuntos pode não ter um menor elemento. Os sistemas ordenados, parcial ou linearmente, com a propriedade de que todos os seus subconjuntos não-vazios possuem um menor elemento são extremamente interessantes, como por exemplo o conjunto dos números naturais, com a ordem usual.

Definição 1.3.7. *Um conjunto ordenado é bem ordenado se todo subconjunto não-vazio tem um menor elemento.*

Teorema 1.3.1. *Toda boa ordem é uma ordem linear.*

Demonstração: Seja (A,$\preceq$) um sistema bem ordenado e seja B=$\{x, y\}$ um subconjunto de A. Como A é bem ordenado, o subconjunto B tem um menor elemento. Assim, $x \preceq y$ ou $y \preceq x$, o que implica $\preceq$ ser uma ordem linear. $\bullet$

Exemplo 1.3.1. $(\mathbb{R}, \leq)$ *é linearmente ordenado, mas não é bem ordenado, pois o intervalo real* $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ *com a mesma ordem, não possui menor elemento, uma vez que o número* 0 *não pertence a esse intervalo.*

Exemplo 1.3.2. $(\mathbb{Q}, \geq)$ *é linearmente ordenado, mas não bem ordenado. Justificativa análoga à do exemplo acima.*

Exemplo 1.3.3. *A classe dos ordinais com a ordem usual é bem ordenada, pois qualquer que seja o subconjunto* $(\{a_1, a_2, a_3, ...\}, <)$ *do sistema* $(\mathbb{Z}^+, <)$ *possui como menor elemento, no sentido da ordem, o número* a_1.

Um dos fatos mais importantes sobre os conjuntos bem ordenados é que pode-se provar propriedades de seus elementos por um processo análogo à indução finita. Esse novo processo é conhecido como Princípio da Indução Transfinita (P.I.T).

Teorema 1.3.2. *(P.I.T.) Seja* $\Phi(\gamma)$ *uma propriedade definida no sistema* $(A, <)$, *onde* A *é o conjuntos dos ordinais e a ordem é a usual. Se* $\Phi(\beta)$ *é verdadeira e implica que* $\Phi(\alpha)$ *é verdadeira, para todo* $\beta < \alpha$, *então temos que* $\Phi(\alpha)$ *é verdadeira para todo e qualquer ordinal* α.

Demonstração: Sabemos que a classe dos ordinais com a ordem usual é bem ordenada. Suponhamos que para alguma propriedade Φ, que satisfaça as hipóteses, exista um ordinal α tal que $\Phi(\alpha)$ é falsa. Então considere a classe $C = \{\alpha : \Phi(\alpha) \text{ é } falsa\} \neq \emptyset$. Seja $\gamma = min(C)$, ou seja, o menor ordinal para o qual a propriedade Φ é falsa. Podemos tomar γ dessa forma por que a classe C é subconjunto da classe dos ordinais, que é bem ordenada. Então, para todo $\lambda < \gamma$, tem-se que $\Phi(\lambda)$ é verdadeira. Portanto por hipótese, $\Phi(\gamma)$ é verdadeira, o que é um absurdo. Assim, $\Phi(\alpha)$ é verdadeira para todo e qualquer ordinal α. $\bullet$

Notas:

(i) O Princípio da Indução Finita (P.I.F.) é um caso particular do P.I.T., aplicado ao conjunto dos naturais com a ordem usual;

(ii) A diferença essencial entre o P.I.F. e o P.I.T. é que no primeiro mostra-se que uma propriedade é válida para um certo elemento a partir de seu predecessor imediato e no segundo, mostra-se tal validade a partir do conjunto de todos os seus predecessores;

Agora temos condições de mostrar a equivalência entre o Lema de Zorn e o Axioma da Escolha, mas antes apresentaremos uma noção de *Classes Próprias*, que na literatura podem ser encontradas também como família de conjuntos.
Na teoria moderna dos conjuntos, entende-se por *Classe* qualquer coleção arbitrária de elementos do universo. Todos os conjuntos são classes (que geralmente são conjuntos), mas nem toda classe é um conjunto. Classes que não são conjuntos são chamadas de *Classes Próprias*. O Princípio da Limitação do Tamanho, em sua vaga formulação, diz que toda classe pequena (no sentido de cardinalidade) são conjuntos, enquanto que classes próprias são muito grandes; Tão grandes que não podem ser pensadas como objetos específicos (conjuntos). Além disso, apenas coleções transfinitas podem ser conjuntos, mas algumas coleções são "absolutamente infinitas", e não pode-se pensar em compreendê-las em um objeto. Desta forma, diz-se que toda classe que tem a mesma cardinalidade da classe universo é muito grande e todas as outras são pequenas. As classes de todos ordinais e de todos conjuntos são classes próprias.

Teorema 1.3.3. *As afirmações do Lema de Zorn e do Axioma de Escolha são equivalentes.*

Demonstração:
($Zorn \Rightarrow Escolha$) Seja X um conjunto, A um conjunto de índices dado e F uma função de A em $\mathcal{P}(X)$, tal que, para todo $\alpha \in A$, $F(\alpha) \neq \emptyset$. O nosso objetivo é provar a existência de uma função de escolha que é definida para todo $\alpha \in A$. Consideremos o conjunto Σ de funções

$$g : \begin{cases} \mathcal{D}g \longrightarrow X & \mathcal{D}g \subset A \\ \alpha \longrightarrow g(\alpha) \in F(\alpha) & \forall \alpha \in \mathcal{D}g. \end{cases}$$

Introduzimos ordem em Σ do mesmo modo como no Exemplo 5:

$$g_1 \prec g_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{D}g_1 \subset \mathcal{D}g_2 \\ g_2(\alpha) = g_1(\alpha) & \forall \alpha \in \mathcal{D}g_1 \end{cases}$$

Seja $H \subset \Sigma$, uma cadeia. Em H definimos a função:

$$\bar{g} : \begin{cases} \mathcal{D}\bar{g} \longrightarrow X & \mathcal{D}\bar{g} = \bigcup_{g \in H} \mathcal{D}g \\ \bar{g}(\alpha) = g(\alpha) & \alpha \in \mathcal{D}g \text{ para algum } g \in H \end{cases}$$

A função $\bar{g}$ está bem definida, pois o seu valor em qualquer α não depende da escolha particular de $g(\alpha)$. De fato, sejam $g, g_1 \in H$ duas funções definidas em α. O fato de H ser linearmente ordenado nos garante que, ou $g \prec g_1$ ou $g_1 \prec g$. Em ambos os casos $g_1(\alpha) = g(\alpha)$ (no domínio da restrição). Logo os valores de $\bar{g}$ independem da escolha de g.

Temos, além disso, que $g \prec \bar{g}$ para toda $g \in H$, ou seja, $\bar{g}$ é cota superior para H. Portanto, pelo Lema de Zorn, Σ tem um elemento g^* que é maximal. Mostremos que $\mathcal{D}g^* = A$. Para este propósito vamos supor o contrário, isto é, que existe um $\alpha_0 \in A \backslash \mathcal{D}g^*$. Definimos:

$$g^{**} : \begin{cases} \mathcal{D}g^* \cup \{\alpha_0\} \longrightarrow X \\ g^{**}(\alpha) = g^*(\alpha) & \forall \alpha \in \mathcal{D}g^* \\ g^{**}(\alpha_0) \in F(\alpha_0). \end{cases}$$

Obviamente g^{**} excede g^*, nos sentido da ordem em Σ, e as duas funções não coincidem. Isto contradiz o fato de g^* ser maximal para Σ.

Conseqüentemente, g^* é uma função de escolha definida no conjunto inteiro de índices A.

(*Escolha* $\Rightarrow$ *Zorn*) Seja $(X, <)$ um sistema parcialmente ordenado tal que toda cadeia possui cota superior. Mostremos que X tem elemento maximal. Para isso, definimos o seguinte conjunto $p(x) = \{y \in X : x < y\} \in \wp(X)$, onde $\wp(X)$ é o conjunto das partes de X. Seja $p(X) = \{p(x) : x \in X\}$. Se $p(x) \in p(X)$ é vazio para algum $x \in X$, ou seja, não existe $y \in X$ tal que $x < y$, então x é o elemento maximal para X e, portanto, o teorema está provado. Agora, suponha que $p(x) \neq \emptyset$ para qualquer $x \in X$, isto é, para cada $x \in X$ existe $y \in X$ que é maior do que x, o que implica no conjunto $p(X)$ ser não vazio também. Então, pelo Axioma da Escolha, existe uma função de escolha f em $p(X)$, tal que para cada $p(x)$ temos $f(p(x)) \in p(x)$. Então, pela definição do conjunto $p(x)$ segue que $x < f(p(x))$. Pela indução transfinita, definimos $f_\alpha(p(x))$ para todo ordinal α, num conjunto de índices A, da seguinte maneira:

$f_0(p(x)) = x$
$f_{\alpha+1}(p(x)) = f(p(f_\alpha(p(x)))).$

Desta forma, sempre que $i < \alpha$, $f_\alpha(p(x))$ é um limite superior de $f_i(p(x))$, pois:

$f_{\alpha+1}(p(x)) = f(p(f_\alpha(p(x)))) \in p(f_\alpha(p(x)))$, o que significa que $f_\alpha(p(x)) < f(p(f_\alpha(p(x))))$, pela definição do conjunto $p(x)$. Então, $f_{\alpha+1}(p(x)) > f_\alpha(p(x))$, para todo ordinal α.

Então, podemos facilmente construir uma função injetiva de A em X dada por $g(\alpha) = f_\alpha(p(x))$ para qualquer $x \in X$ arbitrário.

De fato: Como a classe A dos ordinais é bem ordenada, podemos afirmar que se $\alpha < \beta$, então $\alpha \neq \beta$. Agora, temos que $g(\alpha) = f_\alpha(p(x))$ que é menor que $g(\beta) = f_\beta(p(x))$ sempre que $\alpha < \beta$. Assim, para todo $\alpha \neq \beta$ teremos $g(\alpha) \neq g(\beta)$, o que define uma função injetiva.

Como g é injetiva e tem como domínio o conjunto A de ordinais (que é uma classe própria) então, a cardinalidade de X é no mínimo igual à cardinalidade de A. Portanto, X é também uma classe própria, o que contradiz o fato de X ser um conjunto. Desta forma, não se pode ter tal função de escolha e, assim, o conjunto X admite um elemento maximal. •

1.3.1 Exercícios

1. Sejam $A, B \subset X$. Mostre que os ítens abaixo são equivalentes:
   $a-)A \subset B$; $b-)A \cap B^c = \emptyset$; $c-)A \cup B = B$; $d-)B^c \subset A^c$;
   $e-)A \cap B = A$.

2. Mostre que: $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subset A$, para quaisquer conjuntos $A, B, C \subset X$.

3. Sejam $A, B \subset X$. Demonstre a igualdade: $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$.

4. Mostre que a inclusão: $(A \cup C) \cap (B \cup C^c) \subset A \cup B$ é verdadeira para quaisquer conjuntos $A, B, C \subset X$.

5. A igualdade é verdadeira ou falsa? Dê um contra-exemplo ou demonstre:
   $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

6. Para quaisquer que sejam $A, B, C \subset X$ mostre que:
   $A \cap B = A$ e $B \cap C = \emptyset \Rightarrow A \cap C = \emptyset$. Sugestão: Prove por absurdo.

7. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Temos que $zRw \Leftrightarrow Re(z) = Re(w)$, onde $Re(z)$ é a parte real do complexo z. Prove que R é uma relação de equivalência. Faça o esboço da classe de equivalência de um número complexo qualquer.

8. Seja R a relação de congruência sobre $\mathbb{Z}$: $aRb \Leftrightarrow a \equiv b(modm)$, com $m > 1$. Demonstre que esta é uma relação de equivalência. (Lembrete: $a \equiv b(modm) \Leftrightarrow m|(a-b) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N} : (a-b) = q.m$).

9. Sejam $p = (x, y), q = (w, z) \in \mathbb{R}^2$. Então, $pRq \Leftrightarrow z - y = w - x$. Mostre que R é uma relação de equivalência e represente graficamente a classe de equivalência de $(2, 1)$.

10. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^2$. Então, $uRv \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* : u = \lambda v$. Mostre que R é relação de equivalência.

11. Seja R um subconjunto de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$: $xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Prove que R é uma relação de equivalência. Qual é o conjunto de pontos que são relacionados com o número 1?

12. Em $\mathbb{N}$, definimos $m \leq n \Leftrightarrow n|m$. Mostre que esta é uma relação de ordem parcial, mas não linear. Mostre que todo subconjunto tem limite superior, segundo essa ordem. Determine o conjunto dos elementos maximais.

13. A ordem lexicográfica $\leq$ sobre um conjunto A é aquela seguida na organização de um dicionário. Em um dicionário a letra a precede a letra c, denotada por $a \leq c$ que se lê: a precede c. Da mesma forma: $a \leq abe$, $aab \leq aabc$ e $bace \leq bb$. Outra situação: $1 \leq 3$ que se lê: 1 precede 3. Analogamente: $1 \leq 125$, $112 \leq 1123$ e $2135 \leq 22$. Mostrar que $\leq$ é uma relação de ordem sobre $\mathbb{N}$.

14. Seja $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$.
a-) Demonstre que R é relação de equivalência. Determine e esboce as classes $\overline{(0,0)}$ e$\overline{(1,0)}$;
b-) Sejam $x = \overline{(a,b)}$ e $y = \overline{(c,d)}$. Então, $xSy \Leftrightarrow a + d \leq b + c$. Mostre que S é uma relação de ordem linear.

15. Seja X um conjunto parcialmente ordenado. Mostre que:
a-) Se X tem um menor elemento, então x é o único elemento minimal de X;
b-) Se X é finito, então o único elemento minimal de X, se existir, é o menor elemento;
c-) Dê um exemplo mostrando que se X não for finito, o item $b-)$ é falso.

16. Prove que o Axioma da Escolha é equivalente à seguinte afirmação: Dada uma coleção não vazia C de conjuntos não vazios e distintos dois a dois, então existe um conjunto E que contem exatamente um elemento de cada

conjunto da família C. Este conjunto E é chamado de *conjunto escolha para* C.

17. Mostre que o Axioma da Escolha implica na seguinte afirmação: O produto cartesiano de uma família não vazia de conjuntos não vazios é não vazio.

18. Prove a equivalência entre as afirmações:"O produto cartesiano de uma família não vazia de conjuntos não vazios é não vazio"e "Todo conjunto não vazio possui uma função escolha".

19. Mostrar que todo espaço vetorial V possui uma base e que esta é um elemento maximal para V, no sentido da independência linear. (Sugestão: Lema de Zorn).

20. Demonstre que a seguinte afirmação implica no Lema de Zorn: Qualquer conjunto parcialmente ordenado contem um subconjunto linearmente ordenado maximal.

Capítulo 2

Tópicos da Topologia

2.1 Espaços Topológicos

Definição 2.1.1. *Seja X um conjunto e τ uma família de subconjuntos de X, isto é, $\tau \subset \mathcal{P}(X)$. Dizemos que τ é uma topologia em X se as seguintes exigências são satisfeitas:*
1) $\emptyset \in \tau$ *e* $X \in \tau$*;*
2) *Se* $U_\alpha \in \tau$ *para todo* $\alpha \in A$*, então* $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$*;*
3) *Se* $U \in \tau$ *e* $V \in \tau$*, então* $U \cap V \in \tau$*.*
Se τ é uma topologia em X, a dupla (X, τ) é um espaço topológico.
Os conjuntos de τ são chamados abertos (com respeito a τ).
Os complementos dos conjuntos de τ são chamados fechados.

As seguintes propriedades dos conjuntos fechados num espaço topológico (X, τ) são consequência imediata da definição:
1) $\emptyset$ e X são fechados;
2) Se V_α são fechados, para todo $\alpha \in A$, então $\bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha$ é fechado;
3) Se U e V são fechados, então $U \cup V$ é fechado.

Definição 2.1.2. *Seja $B \subset X$, onde (X, τ) é um espaço topológico.*
1) *O ponto $x_0 \in B$ é chamado ponto interior de B se existe $U \in \tau$, tal que $x_0 \in U \subset B$.*
2) *O ponto y_0 é chamado ponto aderente de B se, para todo $U \in \tau$, tal que $U \ni y_0$, temos $U \cap B \neq \emptyset$.*

Sucintamente dito, o ponto x_0 é interior de B, se x_0 está em B juntamente com pelo menos um conjunto aberto U que contém x_0. Análogamente, y_0 é aderente se, todo aberto que o contém, tem intersecção não-vazia com B. Isto implica imediatamente que, se x_0 é interior, ele é necessariamente aderente. Entretanto, existem conjuntos que possuem pontos aderentes que não são interiores.

Lema 2.1.1. *Seja X uma espaço topológico. Então:*
(i) *O conjunto $U \subset X$ é aberto $\Leftrightarrow$ todo seu ponto é interior.*
(ii) *O conjunto $V \subset X$ é fechado $\Leftrightarrow$ todo seu ponto é aderente.*

Demonstração:
Primeiramente provaremos a afirmação (i). Para mostrarmos a inclusão
($\Leftarrow$),
observemos que, se $x \in U$, pela definição de ponto interior, existe $U_x \in \tau$ tal que $x \in U_x \subset U$. Então,

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x$$

De fato, para provarmos a inclusão $U \subset \cup_{x\in U} U_x$, basta observar que, se $x \in U$, então $x \in U_x$. Analogamente, a inclusão $\cup_{x\in U} U_x \subset U$ segue pelo fato que, se $x \in \cup_{x\in U} U_x$, existe $x_0 \in U$, tal que $x \in U_{x_0}$. Mas $U_{x_0} \subset U$, pela forma como estes conjuntos foram definidos. Então $x \in U$.

Para estabelecermos a inclusão
($\Rightarrow$)
observe que, se $U \in \tau$ e $x \in U$, o próprio conjunto U é o aberto que é contido em si, isto é, podemos definir $U_x = U$ e assim $x \in U_x \subset U$. Portanto x é ponto interior de A.

Agora mostremos a afirmação (ii). Começamos com a inclusão
($\Leftarrow$).
Temos que provar que $X \backslash V$ é aberto. Seja $x \in X \backslash V$. Então, existe um conjunto aberto U_x, tal que $U_x \ni x$ e $U_x \cap V = \emptyset$, pois senão, para o aberto $U \ni x$ teriamos $U \cap V \neq \emptyset$ que contradiz o fato de x ser aderente. Mas, $U_x \cap V = \emptyset$ implica em $U_x \subset X \backslash V$. Logo, $X \backslash V$ é de fato aberto.

Finalmente estabeleceremos a inclusão
($\Rightarrow$).
Sabemos que V é fechado. Suponha que a conclusão não é verdadeira, isto é, que existe um x que é ponto aderente de V, mas $x \notin V$. Então $x \in X \backslash V$ e $X \backslash V$ é aberto. Isto significa que existe um aberto $U_x \ni x; U_x \subset X \backslash V$. Portanto, a última inclusão é equivalente ao fato de que $U_x \cap V = \emptyset$, o que significa que x não é ponto aderente de V. Chegamos a uma contradição.

Corolário 2.1.1. *Seja X um espaço topológico. Então:*

(i) *O conjunto* $U \subset X$ *é aberto* $\Leftrightarrow$ U *coincide com a união dos seus pontos interiores.*
(ii) *O conjunto* $V \subset X$ *é fechado* $\Leftrightarrow$ V *coincide com a união dos seus pontos aderentes.*

Definição 2.1.3. *Seja* $A \in (X, \tau)$*. O fecho* $\bar{A}$ *de* A *é definido por*

$$\bar{A} = \bigcap \{B \supset A \ : \ B \text{ é fechado}\}.$$

Lema 2.1.2. *O fecho* $\bar{A}$ *coincide com o conjunto dos pontos aderentes de* A*.*

Demonstração:
Seja

$$\Gamma = \{x \in X \ : \ x \ \text{ é ponto aderente de } A\}.$$

Temos que provar que $\bar{A} \equiv \Gamma$. Para este propósito, estabeleceremos que cada um destes conjuntos é incluso no outro.

Para mostrarmos a inclusão $[\subset]$, seja $x \in \bar{A}$ e suponha que $x \notin \Gamma$, isto é, que x não seja aderente. Então, existe um conjunto aberto $U_x \ni x$, tal que $U_x \cap A = \emptyset$. Mas $X \backslash U_x$ é fechado. Logo, $x \notin X \backslash U_x$ e $X \backslash U_x \supset A$.

A inclusão $[\supset]$ é obvia. De fato, $\bar{A}$ é fechado, poi é intersecção de fechados. Conseqüentemente, $\bar{A}$ contém os seus pontos aderentes. Isto implica imediatamente que, se $x \in \Gamma$, então $x \in \bar{A}$.

Lema 2.1.3. *O conjunto* V *é fechado se, e somente se,* $\bar{V} = V$*.*

Definição 2.1.4. *Seja* X *um espaço topológico e* $x_0 \in X$*. O conjunto* U *é uma vizinhança de* x_0 *se* x_0 *é ponto interior de* U*. Formalmente,* U *é vizinhança de* x_0 *se existe um aberto* U_{x_0}*, tal que* $x_0 \in U_{x_0} \subset U$*.*

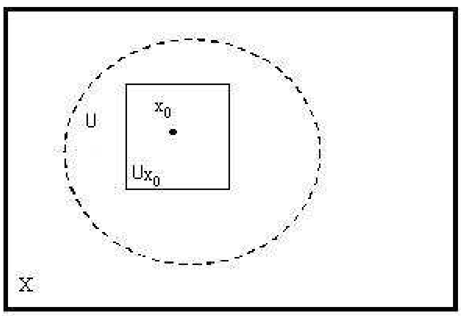

Figura 1 U é vizinha de x_0

Definição 2.1.5. *Seja $x_0 \in X$ que é um espaço topológico e $\mathcal{B}_{x_0}$ uma família de vizinhanças de x_0. Dizemos que $\mathcal{B}_{x_0}$ é base de vizinhanças de x_0 se, para toda vizinhança U de x_0, existe $U_{x_0} \in \mathcal{B}_{x_0}$ tal que $U_{x_0} \subset U$.*

Definição 2.1.6. *A família $\mathcal{B}$ de todas as bases $\mathcal{B}_x$ de todos os pontos $x \in X$ é chamada base (de vizinhanças) de X.*

Exemplo 2.1.1. *Sejam $X \equiv \mathbb{R}$ e a topologia do conjuntos abertos:*
a) $\mathcal{B}_{x_0} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$ *é base de vizinhanças de x_0.*
b) $\mathcal{B}_{x_0} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(x_0 - \epsilon_n, x_0 + \epsilon_n)$, *onde $\epsilon_n \to 0$, é base de vizinhanças de x_0.*
c) $\mathcal{B}_{x_0} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(x_0 - \frac{1}{10}, x_0 + \frac{1}{n})$ *não é base.*
d) *Se $\tau = \{X, \emptyset\}$ é a topologia caótica, então $\mathcal{B}_{x_0} = \{X\}$ é base de vizinhanças de x_0.*

Lema 2.1.4. *Toda base $\mathcal{B} = \bigcup_{x\in X} \mathcal{B}_x$ do espaço topológico X satisfaz:*
1) *Se $V \in \mathcal{B}_x$, então $x \in V$.*
2) *Se $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_x$, existe $V \in \mathcal{B}_x$, tal que $V \subset V_1 \cup V_2$.*
3) *Para todo $V_x \in \mathcal{B}_x$ existe $\tilde{V}_x \in \mathcal{B}_x$, tal que $\tilde{V}_x \subset V_x$ e para todo $y \in \tilde{V}_x$, existe $V_y \in \mathcal{B}_y \ : \ V_y \subset V_x$.*

Teorema 2.1.1. *As propriedades* 1), 2) e 3) *do lema anterior implicam que existe uma única topologia τ em X, tal que $\mathcal{B} = \bigcup_{x\in X} \mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhaças de (X, τ).*

Definição 2.1.7. *Se X é um espaço topológico e $\tau_1 \subset \tau_2$, dizemos que τ_1 é mais fraca do que τ_2.*

A topologia $\{\emptyset, X\}$ é chamada caótica e a topologia $\mathcal{P}(X)$ é chamada discreta. Obviamente, se X é qualquer conjunto, a correspondente topologia caótica é a mais fraca e a topologia discreta é a mais forte.

2.2 Funções Contínuas em Espaços Topológicos

Definição 2.2.1. *O conjunto de índices A é chamado* sistema direcionado à direita *se A é ordenado e, além disso, para todo $\alpha_1, \alpha_2 \in A$, existe $\alpha_3 \in A$, tal que $\alpha_1 \prec \alpha_3$ e $\alpha_2 \prec \alpha_3$.*

Exemplos:
1) $(\mathbb{R}, \leq)$ é um sistema direcionado à direita (sdd);

2) $([a,b],\leq)$ é um sdd;
3) $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\subset)$ é um sdd;
4) $(f,\prec)$ não é um sdd.

Definição 2.2.2. *Seja A um sistema direcionado à direita e X um conjunto. Dizemos que $\Phi : A \to X$ é uma seqüência genérica se Φ é uma função tal que $\Phi(\alpha) = x_\alpha \in X$. Às vezes, chamaremos de sequência genérica (ou generalizada), o próprio codominio de Φ, isto é, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$.*

Definição 2.2.3. *Seja $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma seqüência genérica em X. Se B é um sistema direcionado à direita, e $\psi : B \to A$ é tal que:*
1) Se β_1, $\beta_2 \in B$, $\beta_1 \prec \beta_2$, segue que $\psi(\beta_1) \prec \psi(\beta_2)$;
2) para todo $\alpha_0 \in A$ existe $\beta \in B\ : \alpha_0 \prec \psi(\beta)$,
então a função $\phi\circ\psi : B \longrightarrow X$ é chamada subseqüência de $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Da mesma forma, freqüentemente chamaremos de subseqüência o codominio de $\phi\circ\psi$, isto é, $\{x_{\alpha_\beta}\}_{\beta\in B}$.

Definição 2.2.4. *Seja $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset (X,\tau)$ uma sequência genérica de elementos do espaço topológico (X,τ). O elemento $y \in X$ é chamado ponto de acumulação de $\{x_\alpha\}$ se, para todo conjunto aberto $U \ni y$ e para todo índice $\alpha \in A$, existe $\alpha_1 \in A$ tal que: $\alpha \prec \alpha_1$ e $x_{\alpha_1} \in U$.*

Definição 2.2.5. *Seja X um espaço topológico. Dizemos que $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \longrightarrow x_0$ se, para todo conjunto aberto $U \ni x_0$, existe $\alpha_0 \in A$, tal que, para todo $\alpha : \alpha_0 \prec \alpha$, temos $x_\alpha \in U$.*

Definição 2.2.6. *Sejam X, Y espaços topológicos. A função $f\ :\ X \to Y$ é contínua em $x_0 \in X$ se, para todo aberto $V \subset Y$, com $f(x_0) \in V$, existe um aberto $U \subset X$, tal que $x_0 \in U$ e $f(U) \subset V$.*

Definição 2.2.7. *Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ que transforma cada subconjunto aberto U de X, num subconjunto aberto $f(U)$ de Y chama-se uma aplicação aberta.*

Teorema 2.2.1. *Seja $f : X \to Y$ onde X e Y são espaços topológicos. Então f é contínua em todo ponto $x \in X$ se, e somente se, para todo aberto $V \subset Y$, a imagem inversa $f^{-1}(V)$ é um conjunto aberto em X.*

Demonstração:
A afirmação $(\Leftarrow)$ segue imediatamente da definição anterior.

Para provarmos $(\Rightarrow)$, seja V um conjunto aberto de Y e $W = f^{-1}(V)$. Seja $x_0 \in W$. Então, $f(x_0) \in V$. Desde que f é contínua em x_0, existe um conjunto aberto $U \ni x_0$, tal que $f(U) \subset V$. Logo, $U \subset W$. $\bullet$

Teorema 2.2.2. *A função $f : X \to Y$ onde X e Y são espaços topológicos, é contínua em x_0 se, e somente se, para qualquer seqüencia $\{x_\alpha\}$ que converge para x_0, a seqüencia $\{f(x_\alpha)\}$ converge para $f(x_0)$.*

Demonstração:
Primeiramente vamos provar a afirmação
($\Rightarrow$).
É dado que $x_\alpha \to x_0$. Queremos provar que $f(x_\alpha) \to f(x_0)$. Seja V um aberto em Y, que contém $f(x_0)$. Então, existe um conjunto aberto U em X que contém x_0 tal que $f(U) \subset V$. Mas, sabemos que $x_\alpha \to x_0$. Portanto, existe $\alpha_0 \in A$, tal que para todo α que segue α_0, isto é, $\alpha_0 \prec \alpha$, temos que $x_\alpha \in U$. Portanto, $f(x_\alpha) \in V$ e, consequentemente, $f(x_\alpha) \to f(x_0)$.

Para estabelecermos
($\Leftarrow$),
suponha primeiramente que f não é contínua em x_0. Isto significa que existe um conjunto aberto $V \ni f(x_0)$, tal que para todo $U \ni x_0$, temos $f(U) \setminus V \neq \emptyset$. Consideremos a família $\mathcal{U}$ de todos os conjuntos abertos U com esta propriedade. Em $\mathcal{U}$ introduzemos a relação de ordem por inclusão de decrescimento, isto é, $U_1 \prec U_2$ se $U_1 \supset U_2$. Assim, $\mathcal{U}$ torna-se um sistema direcionado à direita.

Escolhemos, para todo $U \in \mathcal{U}$, um ponto x_U de U de modo que $x_U \to x_0$. Isto pode ser feito pois $\mathcal{U}$ contem todos os conjuntos abertos que contêm x_0. Portanto, se W é aberto, $W \ni x_0$, existe $U \subset W$ e $x_0 \in U \subset W$. Então, de fato $x_U \to x_0$. Por outro lado, desde que para esta escolha dos pontos x_U temos que $f(x_U) \notin V$. Portanto, $f(x_U) \not\to f(x_0)$ que é uma contradição. •

2.3 Espaços Topológicos Separáveis e Normais

Nesta seção provaremos os Teoremas de Urysohn e de Tietze.

Definição 2.3.1. *Seja X um espaço topológico. X é separável (T_2, ou de Hausdorff) se, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, existem conjuntos abertos U_1 e U_2 : $U_1 \ni x_1$, $U_2 \ni x_2$ e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Definição 2.3.2. *Seja X um espaço topológico. X é chamado normal se, para quaisquer conjuntos fechados F_1 e F_2 : $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, existem abertos U_1 e U_2 : $U_1 \supset F_1$, $U_2 \supset F_2$ e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Lema 2.3.1. *O espaço topológico X é normal se, e somente se, para quaisquer conjuntos C fechado e W aberto, tais que $C \subset W$, existe U aberto, tal que $C \subset U$ e $\overline{U} \subset W$.*

Demonstração:

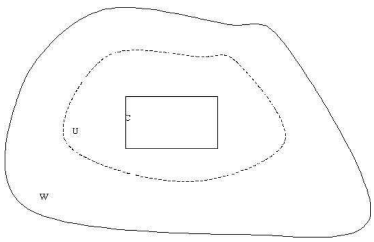

Figura 2 Representação dos conjuntos U, W e C

Primeiramente provaremos a afirmação
($\Rightarrow$).
Sejam C e W como na afirmação. Consideremos C e $X \setminus W$ que são fechados. Observemos que $C \cap (X \setminus W) = \emptyset$.

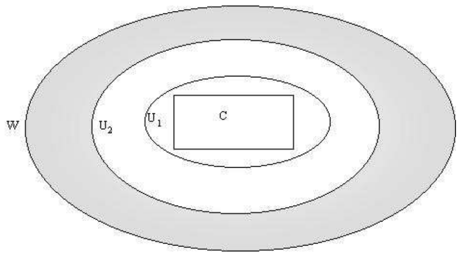

Figura 3 Representação dos conjuntos C, U_1, U_2 e W

Desde que X é normal, pela Definição 2.3.2, existem conjuntos U_1 e U_2 abertos, tais que $U_1 \supset C$, $U_2 \supset (X \setminus W)$ e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Seja $U := U_1$. Então $C \subset U$ e $U \subset (X \setminus U_2)$. Portanto $\overline{U}_1 \subset \overline{(X \setminus U_2)}$. Consequentemente, $\overline{U} \subset (X \setminus U_2) \subset W$.

Mostremos agora a afirmação
($\Leftarrow$).
Sejam C e F fechados disjuntos em X. Então $X \setminus F$ é aberto e $C \subset W = (X \setminus F)$ Logo, existe um aberto U tal que $C \subset U$ e $\overline{U} \subset W$. Mas, $X \setminus \overline{U}$ é aberto, e como $\overline{U} \subset W$, então $F \subset X \setminus \overline{U}$. Como $U \subset \overline{U}$ segue que $X \setminus \overline{U} \cap U = \emptyset$. Portanto, X é normal. $\bullet$

Teorema 2.3.1 (Urysohn). *Sejam X um espaço topológico normal e A, $B \subset X$ fechados, tais que $A \cap B = \emptyset$. Então, existe uma função contínua $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$*

de modo que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \in B \\ \in [0,1], & x \in X. \end{cases}$$

Demonstração:

Seja $G_1 := X \setminus B$. Ele é um conjunto aberto, como complemento de fechado. Desde que $A \cap B = \emptyset$, então $A \subset G_1$. Pelo Lema 2.3.1, existe outro conjunto aberto G_0, tal que $A \subset G_0$ e $\overline{G}_0 \subset G_1$. Aplicando o mesmo lema, com $C = \overline{G}_0$ e $W = G_1$, concluimos que existe um conjunto aberto $G_{1/2}$, tal que $\overline{G}_0 \subset G_{1/2}$ e $\overline{G}_{1/2} \subset G_1$. Novamente pelo lema, com $C = \overline{G}_0$, $W = G_{1/2}$, existe mais um conjunto aberto $G_{1/4}$, tal que $\overline{G}_0 \subset G_{1/4}$ e $\overline{G}_{1/4} \subset G_{1/2}$. Usando mais uma vez o lema, desta vez com $C = \overline{G}_{1/2}$ e $W = G_1$, existe um aberto $G_{3/4}$ que satisfaz $\overline{G}_{1/2} \subset G_{3/4}$ e $\overline{G}_{3/4} \subset G_1$.

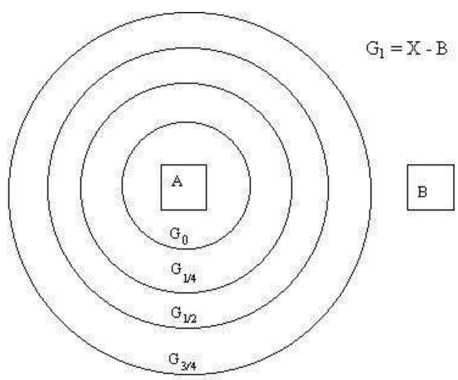

Figura 4 Representação dos conjuntos $G_{k/2^m}$

Repitindo este raciocínio, podemos construir uma seqüência de conjuntos abertos $G_{k/2^m}$, onde $m = 1, 2, \ldots$, e $k = 1, 2, \ldots, 2^m$ que gozam das seguintes propriedades: Se p, q e r são três números racionais, cada um da forma $k/2^m$, e $p < q < r$, então $\overline{G}_p \subset G_q$ e $\overline{G}_q \subset G_r$. Às vezes os números da forma são chamados binários.

Seja

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r : \; x \in G_r, \; r = k/2^m\}, & x \in X \setminus B, \\ 1, \quad x \in B. \end{cases}$$

É claro que $f(x) = 0$, $x \in A$ e $f(x) \in [0,1]$, $x \in X$. Provemos então a continuidade. Seja $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$. Consideremos $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$, que é a correspondente ε-vizinhança de $f(x_0)$ em $\mathbb{R}$. Temos que achar um aberto

$U \subset X$, tal que $U \ni x_0$ e $f(U) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Para este propósito, consideremos dois casos, o primeiro quando x_0 é tal que $f(x_0) = 1$ e o segundo quando $f(x_0) \neq 1$.

a) $f(x_0) = 1$ Pela própria definição da função $f(x)$, temos que $x_0 \notin \bigcap_{r=k/2^m} G_r$. Desde que a família dos números da forma $k/2^m$ é densa em $[0,1]$, existe um tal número r_0, $1 - r_0 < \varepsilon$. Consideremos $U = X \setminus \overline{G}_{r_0}$. Se $x \in U$, então $f(x) > r_0 > 1 - \varepsilon$. Agora, desde que $f(x) \in [0,1]$, obviamente $f(x) - f(x_0) \leq 0 < \varepsilon$. Portanto

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

b) $f(x_0) \neq 1$. Vamos escolher r_1 e r_2 da forma $k/2^m$, tais que $f(x_0) - \varepsilon < r_1 < f(x_0) < r_2 < f(x_0) + \varepsilon$. Tal escolha é possível pela densidade dos números binários. Consideramos $U = G_{r_2} \setminus \overline{G}_{r_1}$. Logo, se $x \in U$, temos $r_1 \leq f(x) \leq r_2$, o que implica em.

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

$\bullet$

Corolário 2.3.1. *Seja X um espaço topológico normal e A, $B \subset X$ fechados, com $A \cap B = \emptyset$. Então, para quaisquer números reais $m_1 < m_2$, existe uma função contínua $g : X \to \mathbb{R}$ de modo que*

$$g(x) = \begin{cases} m_1, & x \in A \\ m_2, & x \in B \\ \in [m_1, m_2], & x \in X. \end{cases}$$

Lema 2.3.2. *Seja X um espaço topológico normal, A um conjunto fechado, e $\varphi : A \to \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que $|\varphi(x)| \leq C$. Então, existe uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$, tal que*

$$|\varphi(x) - f(x)| \leq \frac{2}{3}C, \qquad \forall\, x \in A$$

e

$$|f(x)| \leq \frac{1}{3}C, \quad \forall\, x \in X.$$

<u>Demonstração</u>:
Considere

$$A_1 := \left\{ x \in A : \; \varphi(x) \leq -\frac{1}{3}C \right\}$$

$$A_2 := \left\{ x \in A : \; \varphi(x) \geq \frac{1}{3}C \right\}.$$

Temos que A_1 e A_2 são fechados em X e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Pelo Teorema de Urysohn segue que existe uma função contínua, $f : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}C, & x \in A_1 \\ \frac{1}{3}C, & x \in A_2 \\ \in \left[-\frac{1}{3}C, \frac{1}{3}C\right], & x \in X. \end{cases}$$

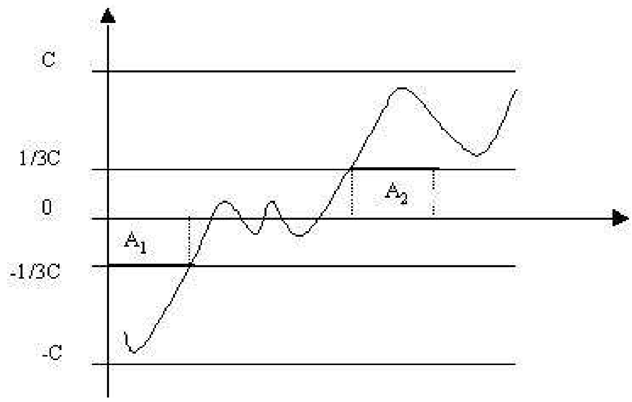

Figura 5 Representação da função f

Claramente $|f(x)| \leq \frac{1}{3}C$ para todo $x \in X$. Agora, se $x \in A_1$,

$$f(x) - \varphi(x) = -\frac{1}{3}C - \varphi(x) \geq 0$$

e

$$\varphi(x) - f(x) \geq -C + \frac{1}{3}C = -\frac{2}{3}C.$$

Portanto,

$$f(x) - \varphi(x) \geq 0 \quad \text{e} \quad f(x) - \varphi(x) \leq \frac{2}{3}C.$$

Consequentemente,

$$|\varphi(x) - f(x)| \leq \frac{2}{3}C.$$

Se $x \in A_2$,

$$0 \leq \varphi(x) - f(x) \leq C - \frac{1}{3}C = \frac{2}{3}C.$$

Logo,

$$|\varphi(x) - f(x)| \leq \frac{2}{3}C.$$

Se $x \notin A_1$ e $x \notin A_2$ simultaneamente,

$$|\varphi(x)| < \frac{1}{3}C \quad \text{e} \quad |f(x)| \leq \frac{1}{3}C.$$

Consequentemente,

$$\Rightarrow |\varphi(x) - f(x)| \leq |\varphi(x)| + |f(x)| \leq \frac{2}{3}C.$$

•

Teorema 2.3.2 (Tietze). *Seja X um espaço topológico normal, A um conjunto fechado em X e $\varphi : A \to \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada. Então existe uma extensão contínua $f : X \to \mathbb{R}$, tal que $f|_A \equiv \varphi$ e, além disso,*

$$\inf_{x\in A} \varphi(x) \leq f(x) \leq \sup_{x\in A} \varphi(x), \quad \forall\ x \in X.$$

Demonstração:
Desde que $\varphi(x)$ é limitada em X, existe uma constante C, tal que $|\varphi(x)| \leq C$, $\forall\ x \in A$. Além disso, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\inf\{\varphi(x)\ : x \in A\} = -C$ e $\sup\{\varphi(x)\ : x \in A\} = C$. De fato, se provarmos a afirmação do teorema para função $\varphi(x)$ com esta propriedade, para tratarmos o caso geral, basta somente observar que o enunciado do teorema não depende de "transformações" da forma $\varphi(x) + c$, $f(x) + c$.

Primeiramente, provaremos por indução a existência de uma sequência de funções contínuas $\{f_n\}$ que satisfazem

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} C, \qquad \forall\ x \in X, \tag{2.3.1}$$

e, além disso,

$$|\varphi(x) - f_1(x) - \ldots - f_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n} C, \qquad \forall\ x \in A.$$

Para $n = 1$, o resultado segue do Lema 2.3.2, ou seja, existe uma função contínua f_1, tal que

$$|\varphi(x) - f_1(x)| \leq \frac{2}{3}C, \quad \forall\ x \in A \quad \text{e} \quad |f_1(x)| \leq \frac{1}{3}C, \quad \forall\ x \in X.$$

Para $n = 2$, considere $\phi = \varphi - f_1$. Temos que

$$|\phi| = |\varphi - f_1| \leq \frac{2}{3}C = C^{'}.$$

Logo pelo Lema 2.3.2, existe função contínua f_2 tal que

$$|\phi - f_2| \leq \frac{2}{3}C^{'} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 C \quad \text{e} \quad |f_2| \leq \frac{1}{3}C^{'} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) C.$$

Hipótese de indução: Suponha que o resultado seja válido para um número natural n, isto é, que existem funções contínuas $f_1, f_2, \ldots, f_n$, todas satisfazendo (2.3.1), e, além disso,

$$|\Phi| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n C = C^{''},$$

onde $\Phi = \varphi - f_1 - \ldots - f_n$. Então, pelo Lema 2.3.2, existe uma função contínua f_{n+1}, tal que

$$|\Phi - f_{n+1}| \leq \frac{2}{3}C^{''} = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n C = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} C \quad \text{e} \quad |f_{n+1}| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n C.$$

Portanto, o resultado vale para $n+1$, e assim pelo princípio da indução matemática, para qualquer número natural n.

Consideremos a função

$$f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x).$$

A série é absolutamente convergente. De fato,

$$|f| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)| \leq \frac{1}{3}C\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \frac{1}{3}C\frac{1}{1-2/3} = C.$$

Por outro lado, se uma série de funções é absolutamente convergente, ela é também uniformemente convergente. Portanto, a sua soma é uma função contínua. Consequentemente, f é contínua. Desde que $|f| \leq C$, então

$$\inf_{x\in A} \varphi(x) \leq f(x) \leq \sup_{x\in A} \varphi(x), \quad \forall\ x \in X.$$

Temos que $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$, onde

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \quad \text{e} \quad R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x).$$

Do fato de $S_n(x)$ convergir uniformemente para $f(x)$ segue que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\nu \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $n > \nu$ temos que $|S_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,\ \forall\ x \in X$. Portanto, $|R_n(x)| \leq \varepsilon,\ \forall\ x \in X$. Seja $\mu > \nu$ e, além disso $\left(\frac{2}{3}\right)^{\mu} C < \varepsilon$. Logo, para todo $n > \mu > \nu$ temos que

$$|R_n(x)| < \varepsilon, \forall\ x \in X$$

e

$$|\varphi(x) - S_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n C \leq \left(\frac{2}{3}\right)^\mu C < \varepsilon, \ \forall\, x \in A.$$

Portanto,

$$|\varphi(x)-f(x)| = |\varphi(x)-S_n(x)+R_n(x)| \leq |\varphi(x)-S_n(x)|+|R_n(x)| < 2\varepsilon, \ \forall\, x \in A.$$

Consequentemente, $\varphi(x) - f(x) \equiv 0, \ \forall\, x \in A$, ou seja, $f|_A \equiv \varphi$. •

2.4 Compactos em espaços Topológicos

Definição 2.4.1. *Seja X um espaço topológico e $D \subset X$. A família $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é chamada cobertura de D se $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \supset D$. Equivalentemente, para todo $x \in D$, existe pelo menos um índice $\alpha \in A$, tal que $U_\alpha \ni x$.*

Definição 2.4.2. *Seja X um espaço topológico. O conjunto $K \subset X$ é chamado compacto se, para toda cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de K, composta por conjuntos abertos U_α, existe $n \in \mathbb{N}$ e índices $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in A$, tais que*

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \supset K.$$

Isto significa que K é compacto se qualquer cobertura de K, composta por conjuntos abertos, possui uma subcobertura finita.

Frequentemente, as coberturas compostas por conjuntos abertos são sucintamente chamadas de *coberturas abertas*.

Lema 2.4.1. *Seja X um espaço topológico e $K \subset X$ um conjunto compacto. Se G é um subconjunto fechado de K, então G é compacto.*

Demonstração:

Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de G, isto é, $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \supset G$. Obviamente $V = X \setminus G$ é aberto. Portanto, $V \cup \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura aberta de K, que é compacto. Logo, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ tais que

$$V \ \cup \ \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \supset K \supset G.$$

Conseqüentemente, $\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \supset G$, e portanto, G é compacto. •

Definição 2.4.3. *Seja F uma família de subconjuntos de D. F tem a propriedade da intersecção finita se, todo número finito de elementos de F possui intersecção não-vazia. Formalmente, isto significa que, se*

$$F = \{F_\alpha \subset D \ : \ \alpha \in A\},$$

então F possui a propriedade da intersecção finita se, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para quaisquer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$, temos que $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} \neq \emptyset$.

Definição 2.4.4. *Seja (X, τ) um espaço topológico e $D \subset X$. A família de conjuntos $\tau_D = \{U \cap D : U \in \tau\}$ é chamada topologia induzida por D*

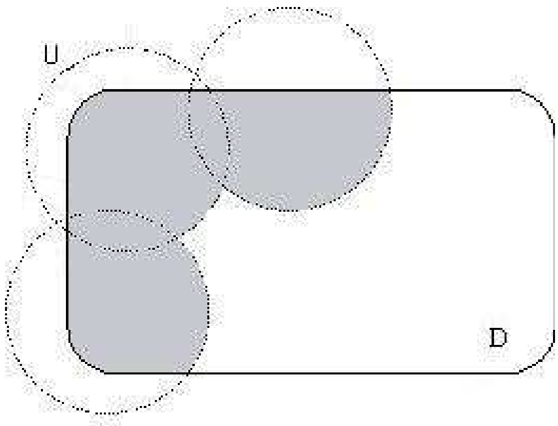

Figura 6 $\tau_D = \{U \cap D : U \in \tau\}$

- Provar que (D, τ_D) é um espaço topológico

Lema 2.4.2. *Seja X um espaço topológico e $K \subset X$. Então, K é compacto se, e somente se, toda família de subconjuntos fechados de K que satisfaz a p.i.f. (com respeito a topologia induzida em K) tem intersecção não-vazia.*

Demonstração:

Provaremos inicialmente a afirmação

($\Rightarrow$).

Suponha que $F = \{F_\beta\}_{\beta \in B}$ é uma família de subconjuntos fechados de K satisfazendo a p.i.f. e cuja intersecção é vazia, $\bigcap_{\beta \in B} F_\beta = \emptyset$. Definimos $U_\beta = K \setminus F_\beta$. Temos que

$$\bigcup_{\beta \in B} U_\beta = \bigcup_{\beta \in B} (K \setminus F_\beta) = K \setminus \bigcap_{\beta \in B} F_\beta = K.$$

Portanto $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$ é uma cobertura aberta de K, que é compacto. Logo, existe índices $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, de modo que $\bigcup_{i=1}^{n} U_{\beta_i} \supset K$. Isto é equivalente ao fato de que $K \setminus \bigcap_{i=1}^{n} F_{\beta_i} \supset K$. Consequentemente

$$K \cap \bigcap_{i=1}^{n} F_{\beta_i} = \emptyset,$$

o que é uma contradição com o fato de F satisfazer a p.i.f..

Para provarmos a afirmação
($\Leftarrow$),
seja $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma cobertura aberta de K, isto é, $\bigcup U_\alpha \supset K$. Então, para os conjuntos $F_\alpha = K \setminus U_\alpha$, temos

$$\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A}(K \setminus U_\alpha) = K \setminus \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \emptyset.$$

Desde que a intersecção dos conjuntos F_α é vazia, $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ não satisfaz a p.i.f., isto é, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, tais que $\bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} = \emptyset$. Consequentemente,

$$\bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} = \bigcup_{i=1}^n (K \setminus F_{\alpha_i}) = K \setminus \bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} = K$$

Portanto K é compacto. •

Lema 2.4.3. *Seja X um espaço topológico separável. Se o conjunto $K \subset X$ é compacto, então K é fechado.*

Demonstração:
Provaremos que $X \setminus K$ é aberto. Seja $x \in X \setminus K$. Se $y \in K$ é um ponto arbitrário. Então $y \neq x$. Desde que X é separável, existem conjuntos abertos V_y e U_y, tais que $V_y \ni x$, $U_y \ni y$ e $U_y \cap V_y = \emptyset$. Obviamente $\bigcup_{y\in K} U_y \supset K$, isto é, $\{U_y\}_{y\in K}$ é uma cobertura aberta de K. O fato de K ser compacto implica na existência de uma subcobertura finita $\{U_{y_i}\}_{i=1}^n$. Denotamos por U a união dos conjuntos desta subcobertura, $U = \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$. Seja $V = \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$. Obviamente U e V são abertos. Além disso,

$$K \subset U, \quad \text{e} \quad V \ni x \quad \text{e} \quad U \cap V = \emptyset. \tag{2.4.2}$$

De fato, as afirmações $K \subset U$ e $V \ni x$ são conseqüências imediatas das definições de U e de V. Para provarmos que $U \cap V = \emptyset$, vamos supor o contrário, isto é, que existe z, tal que $z \in U$ e $z \in V$ simultaneamente. Portanto existe pelo menos um índice k, $1 \leq k \leq n$, tal que $z \in U_{y_k}$. Mas $z \in V_{y_k}$ pois z está dentro de todos os V_{y_i}. Portanto, teremos $U_{y_k} \cap V_{y_k} \neq \emptyset$, que é uma contradição com a escolha dos conjuntos U_y e V_y.

Observamos agora que (2.4.2) implica em $x \in V \subset X \setminus U \subset X \setminus K$. Isto significa que x é um ponto interior de $X \setminus K$, isto é, que $X \setminus K$ é aberto. •

Teorema 2.4.1. *Todo espaço topológico separável que é compacto, é normal.*

Demonstração: Seja K um espaço topológico separável e compacto. Sejam A e B fechados, tais que $A, B \subset K$ e $A \cap B = \emptyset$. Lema 2.4.1 implica que A e B são compactos.

Primeiramente consideremos um ponto qualquer $y \in B$. Desde que K é separável, para todo $x \in A$ existem conjuntos abertos U_{xy} e V_{xy}, tais que $U_{xy} \ni x$, $V_{xy} \in y$ e $U_{xy} \cap V_{xy} = \emptyset$. De fato, podemos afirmar até que $U_{xy} \supset A$, $V_{xy} \supset B$.

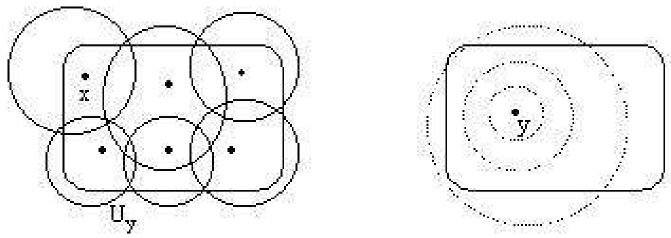

Figura 7 Representação da cobertura U_y

Desde que $\bigcup_{x \in A} U_{xy} \supset A$ e A é compacto, existe uma subcobertura finita, i.é,

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i y} \supset A \quad \text{e} \quad \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i y} \ni y.$$

Obviamente os conjuntos $U_y := \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i y}$ e $V_y := \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i y}$ são abertos. Além disso, podemos provar, como no lema anterior, que $U_y \cap V_y = \emptyset$

Variando agora o ponto y em B, concluimos que $\bigcup_{y \in B} V_y \supset B$. Mas B também é compacto, o que implica na existência de uma subcobertura finita $\{V_{y_i}\}$, isto é, $\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} \supset B$.

Podemos introduzir os conjuntos $V := \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ e $U := \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ e afirmar que eles são abertos. Obviamente $U \supset A$ e $V \supset B$. Precisamos mostrar que $U \cap V = \emptyset$. Para este propósito, suponha que existe $z \;:\; z \in V$ e $z \in U$. Então, existe um índice $k, 1 \leq k \leq n$, tal que $z \in V_{y_k}$. Mas obviamente $z \in U_{y_k}$ também, o que implica em $V_{y_k} \cap U_{y_k} \neq \emptyset$ que contradiz à escolha destes conjutos.
•

Teorema 2.4.2. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função contínua. Se $K \subset X$ é compacto, então $f(K) \subset Y$ também é compacto.*

Demonstração:

Seja $\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha$ uma cobertura de abertos de $f(K)$, isto é,

$$\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha \supset f(K).$$

Desde que $f \in C(X)$, então os conjuntos $U_\alpha := \{x \in X \ : \ f(x) \in V_\alpha\}$ são abertos em X. Além disso, obviamente os conjuntos U_α, $\alpha \in A$, formam uma cobertura de K, $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \supset K$. Desde que K é compacto, então, existe uma subcobertura finita, isto é, $\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \supset K$. Consequentemente,

$$\bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i} = \bigcup_{i=1}^{n} (f(U_{\alpha_i})) \supset f(K),$$

e portanto, $f(K)$ é compacto. •

Lema 2.4.4. *Seja X um espaço topológico, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma seqüência generalizada em X e y um ponto de acumulação de $\{x_\alpha\}$. Então, existe uma subseqüência $\{x_{\alpha\beta}\}$, tal que $\{x_{\alpha\beta}\} \to y$.*

Demonstração:

Temos que construir uma subseqüência $\{x_{\alpha\beta}\}$, tal que, para todo conjunto aberto $V \ni y$, existe um índice β_0, de modo que, para todo $\beta, \beta_0 \prec \beta$, temos $x_{\alpha\beta} \in V$. Seja

$$B = \{(\alpha, V) \ : \ \alpha \in A, \ V \ni y \text{ e } x_\alpha \in V\}.$$

Introduzimos ordem em B da seguinte forma: dizemos que $\beta_1 \prec \beta_2$ se as exigências $\alpha_1 \prec \alpha_2$ e $U_1 \supset U_2$ são satisfeitas simultaneamente. Pelo fato de y ser ponto de acumulação, a segunda exigência desta definição é válida.

Provemos que $\{x_{\alpha\beta}\} \to y$. Sejam V aberto, $V \ni y$ e $\beta_0 = (\alpha_0, V)$. Isto significa que $x_{\alpha_0} \in V$. Portanto, para todo $\beta \succ \beta_0$, temos que $\alpha_0 \prec \alpha$ e $x_\alpha \in V_\alpha \subset V_{\alpha_0} = V$. •

Teorema 2.4.3. *Seja X um espaço topológico e $K \subset X$. Então, K é compacto se, e somente se, toda sequência $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de elementos de K possui um ponto de acumulação em K.*

Demonstração:

($\Rightarrow$)

Seja $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma seqüência generalizada de X tal que $x_\alpha \in K$. Suponha que todos os pontos de acumulação de $\{x_\alpha\}$ pertencem a $X \backslash K$.

Seja $x \in K$ um ponto qualquer de K. Então, ele não é ponto de acumulação de $\{x_\alpha\}$. Portanto, existe um conjunto aberto U_x, $U_x \ni x$, tal que, existe um índice α_0, de modo que, para todo $\alpha \succ \alpha_0$, temos que $x_\alpha \notin U_x$. Por outro lado,

$$\bigcup_{x\in K} U_x \supset K.$$

Desde que K é compacto, existe uma subcobertura finita

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \supset K.$$

Seja o índice α_i tal que, para todo $\alpha \succ \alpha_i$, temos $x_{\alpha_i} \notin U_{x_i}$.

Desde que A é um sistema direcionado a direita, existe α', tal que $\alpha_1 \prec \alpha', ..., \alpha_n < \alpha'$ simultaneamente. Então, $x_{\alpha'} \notin U_{x_i}$. Chegamos a uma contradição pois $x_{\alpha'} \in K \subset \cup_{i=1}^{n} U_{x_i}$.

($\Leftarrow$)

Seja $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ uma cobertura aberta de K,

$$\bigcup_{\beta\in B} V_\beta \supset K.$$

Suponha que K não é compacto. Isto significa que para todo subconjunto finito de índices teremos

$$\bigcup_{k=1}^{n} V_k \not\supset K.$$

Seja

$$A := \{\alpha = \{V_1, ..., V_{n_d}\} \ : \ d \text{ é finito}, \ V_k \in \{V_\beta\}_{\beta\in B}, \ k = 1, ..., n_d\}.$$

A ordem em A é definida por $\alpha_1 \prec \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_1 \subset \alpha_2$. Para todo índice $\alpha \in A$, escolhemos um ponto x_α, tal que $x_\alpha \in K \backslash (\cup_{i=1}^{n_d} V_i)$. A sequência $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ tem que ter um ponto de acumulação $y \in K$.

Seja $V_{\beta_0} \ni y$ e $\alpha_0 = \{V_{\beta_0}\}$, $\alpha_0 \in A$. Se $\alpha \succ \alpha_0, \alpha \in A$, então $\alpha = \{V_{\beta_0}, V_1, ..., V_{n_d}\}$. Pela definição da sequência, $x_\alpha \notin V_{\beta_0}$. Portanto, y não pode ser ponto de acumulação em A para $\{x_\alpha\}$, o que é contradição. •

2.5 Teorema de Tikhonov

Definição 2.5.1. *Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$, onde $X_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in A$, uma família de espaços topológicos. Pelo Axioma da Escolha existe pelo menos uma função $f \ : \ A \longrightarrow \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ tal que : $f(\alpha) = X_\alpha$ para todo $\alpha \in A$.*

O conjunto de todas as funções f com esta propriedade é chamado produto de Tikhonov de $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

O produto de Tikhonov é denotado por $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Notemos que um elemento do espaço-produto é da forma $x = (x_\alpha : \alpha \in A)$, onde $x_\alpha \in X_\alpha$. Portanto, um ponto x é uma função $x : A \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ tal que: $x(\alpha) = x_\alpha \in X_\alpha$ para todo $\alpha \in A$.

Definição 2.5.2. *Os abertos elementares em* $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ *são os conjuntos da forma* $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$, *onde* $U_\alpha \subset X_\alpha$, *todos os* U_α *são abertos e, além disso, somente para um número finito de índices* α *temos* $U_\alpha \neq X$. *Em outras palavras, isto significa que dentre todos os indices* $\alpha \in A$, *existe somente um número finito* n *deles* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *com a propriedade que* $U_{\alpha_1} \subsetneq X_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_s} \subsetneq X_{\alpha_n}$.

Definição 2.5.3. *A função*

$$\pi_\beta \ : \ \begin{cases} \prod_{\alpha \in A} X_\alpha & \longrightarrow & X_\beta \\ f & \longrightarrow & f(\beta) \end{cases}$$

é chamada projeção do espaço de Tikhonov sobre X_β.

Podemos também definir os abertos elementares do espaço-produto $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ da seguinte forma:

$$U = \prod_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}), \ f(\alpha_i) = U_{\alpha_i}$$

onde U_{α_i} é um subconjunto aberto do espaço X_{α_i}.

Portanto, um aberto qualquer do espaço-produto será qualquer união e intersecção de abertos elementares.

Observemos que, os abertos elementares constituem uma base de uma topologia τ no espaço-produto. De fato, pois a intersecção finita de abertos elementares é, por definição, um aberto elementar e qualquer aberto de τ é a união de abertos elementares, por definição. Assim,

$$\tau := \left\{ G : \ G = \bigcup U, \text{onde } U \text{ são os abertos elementares ou } G = \bigcap_{i=1}^{n} U_i \right\},$$

define uma topologia no espaço-produto, ou seja, $(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \tau)$ é espaço topológico.

Teorema 2.5.1. *As projeções* $\pi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ *em um espaço produto* $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ *são contínuas e abertas.*

Dem: Seja U_{α_0} um aberto de X_{α_0}. Pelo teorema 2.2.1, para provar que $\pi_{\alpha_0} : X \longrightarrow X_{\alpha_0}$ é contínua, é necessario e suficiente mostrar que para todo U_{α_0}

aberto em X_{α_0} temos $\pi_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0})$ é aberto em X. Por definição temos

$$\pi^{-1}(U_{\alpha_0}) = U_{\alpha_0} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_0} X_\alpha(\text{ fatia de largura } U_{\alpha_0})$$

que é um aberto do espaço-produto, o que demonstra a continuidade.

Continuando, seja U um aberto elementar de X, i.é,

$$U = U_{\alpha_1} \times \ldots \times U_{\alpha_m} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_k} X_\alpha$$

Então $\pi_{\alpha_k}(U) = U_{\alpha_k}$ é um aberto de X_{α_k}. Como todo aberto V de X é a união de abertos elementares, ou seja, $V = \bigcup_\lambda U_\lambda$, segue que, $\pi_{\alpha_k}(V) = \bigcup_\lambda \pi_{\alpha_k}(U_\lambda)$ é aberto de X_{α_k}. Portanto, as projeções são abertas.

Teorema 2.5.2. *Uma seqüência $x_1, x_2, ...$ de pontos de um espaço-produto $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ converge para um ponto $x \in X$ se, e somente se, para cada projeção $\pi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$, a seqüencia $\pi_\alpha(x_1), \pi_\alpha(x_2), ...$ converge para $\pi_\alpha(x)$ no espaço-coordenado X_α.*

Dem: ($\Rightarrow$) Suponha $x_n \to x$. Então, como toda projeção é contínua, segue do teorema 2.2.2 que $\pi_\alpha(x_n) \to \pi_\alpha(x)$.

($\Leftarrow$) Suponha $\pi_\alpha(x_n) \to \pi_\alpha(x)$ para toda projeção $\pi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$

Pela definição de convergência, $x_n \to x$ se para todo U aberto contendo x, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in U$.

Seja $U \ni x$ um aberto qualquer, i.é,

$$U = \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap \pi_{\alpha_m}^{-1}(U_{\alpha_m})$$

onde U_{α_k} é um aberto do espaço-coordenado X_{α_k}. Como $x \in U$, segue que, $\pi_{\alpha_1}(x) \in \pi_{\alpha_1}(U) = U_{\alpha_1}, \ldots, \pi_{\alpha_m}(x) \in \pi_{\alpha_m}(U) = U_{\alpha_m}$. Mas por hipótese,

$$\pi_{\alpha_k}(x_n) \to \pi_{\alpha_k}(x), k = 1, \ldots, m$$

e portanto,

$$\exists n_k \in \mathbb{N}; n > n_k \Rightarrow \pi_{\alpha_k}(x_n) \in U_{\alpha_k} \Rightarrow x_n \in \pi_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k})$$

Tomemos $n_0 = máx\{n_k\} para\ k = 1, 2, \ldots, m$. Então,

$$n > n_0 \Rightarrow x_n \in \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap \pi_{\alpha_m}^{-1}(U_{\alpha_m}) = U$$

Portanto, $x_n \to x$.

A seguir, demonstraremos um dos mais importantes teoremas da topologia, conhecido como Teorema de Tikhonov, que mostra a compacidade do espaço-produto. Para provar este teorema faz-se uso do seguinte resultado, que é conseqüência do lema de Zorn.

Lema 2.5.1. *Seja $\Im$ uma coleção de subconjuntos de um conjunto X, com a propriedade da intersecção finita. Existe uma coleção $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X, máxima com a propriedade de intersecção finita e contendo $\Im$.*

Dem: Seja P o conjunto de todas as coleções Γ de subconjuntos de X que contêm $\Im$ e gozam da propriedade da intersecção finita. Consideremos $(P, \subset)$ parcialmente ordenado. Notemos que, dado um conjunto linearmente ordenado de coleções de subconjuntos de X, cada uma delas em P, a união dessas coleções ainda pertence a P, e portanto, todo subconjunto linearmente ordenado de P possui cota superior e, pelo Lema de Zorn, existe em P um elemento maximal $\mathcal{M}$, o que demonstra o lema.

O elemento maximal $\mathcal{M}$ do lema possui as seguintes propriedades:

(i) Todo superconjunto de um membro de $\mathcal{M}$ também pertence a $\mathcal{M}$;

(ii) A intersecção de um número finito de membros de $\mathcal{M}$ também pertence a $\mathcal{M}$;

(iii) Se $U \cap M \neq \emptyset$ para todo $M \in \mathcal{M}$, então $U \in \mathcal{M}$.

Demonstraremos apenas o item (iii), os outros dois ítens ficam como exercício.

Demontração: Suponha que $U \notin \mathcal{M}$, então existe um elemento que pertence a U e não pertence a $\mathcal{M}$. Tomemos o conjunto $\mathcal{M}^* = U \bigcup \mathcal{M}$. Este conjunto está em $(P, \subset)$. De fato, $\mathcal{M}^*$ contém $\Im$ e goza da p.i.f., pois usando a hipótese de que $U \cap M \neq \emptyset$ para todo $M \in \mathcal{M}$ e a propriedade (ii), temos: $U \bigcap (\bigcap_{k=1}^{n} M_{j_k}) \neq \emptyset$, onde $M_{j_k} \in \mathcal{M}$. Portanto, $\mathcal{M}^*$ é diferente e maior que $\mathcal{M}$, no sentido da ordem, o que é absurdo, pois $\mathcal{M}$ é o elemento maximal.

Teorema 2.5.3. *Se $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma família de espaços compactos, então o produto*

$$X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

é compacto.

Dem: Seja $\Im = \{F_i : i \in I\}$ uma família de subconjuntos fechados do produto X com a propriedade da intersecção finita. Então, pelo lema 2.4.2, para provar que X é compacto, é necessário e suficiente mostrar que $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$, ou seja,

$$\exists\ x \in X \ tal\ que\ x \in F_i\ para\ todo\ F_i \in \Im$$

Pelo lema anterior, podemos escolher uma coleção $\mathcal{M} = \{M_j : j \in J\}$ de subconjuntos de X, contendo $\Im$ e máxima com relação a propriedade da intersecção finita. Notemos que os conjuntos pertencentes a $\mathcal{M}$ não são necessariamente fechados. Por este motivo, definamos $\overline{\mathcal{M}} = \{\overline{M}_j : j \in J\}$. Observemos que $F_i \in \Im \Rightarrow F_i = \overline{F_i}$ e $F_i \in \mathcal{M} \Rightarrow F_i \in \overline{\mathcal{M}}$. Então basta provarmos que $\overline{\mathcal{M}}$ tem uma intersecção não-vazia, isto é,

$$\exists\ x \in X\ tal\ que\ x \in \overline{M}_j\ para\ todo\ \overline{M}_j \in \mathcal{M}$$

e portanto, x é ponto de acumulação de todo $M_j \in \mathcal{M}$. Pela definição de ponto de acumulação, o teorema estará provado, se mostrarmos que para qualquer aberto $U \ni x$ do espaço-produto, temos: $U \bigcap M_j \neq \emptyset\ para\ todo\ M_j \in \mathcal{M}$.

Seja $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ a projeção no espaço topológico X_α. Para cada índice α, a coleção

$$\pi_\alpha(\mathcal{M}) = \{\pi_\alpha(M_j) : j \in J\}$$

das projeções de todos os conjuntos $M_j \in \mathcal{M}$ tem a p.i.f.. De fato, pois

$$\pi_\alpha(M_1) \cap \ldots \cap \pi_\alpha(M_n) \supset \pi_\alpha(M_1 \cap \ldots \cap M_n) \neq \emptyset$$

Logo, a coleção dos fechos

$$\{\overline{\pi_\alpha(M_j)} : j \in J\}$$

é uma coleção de subconjuntos fechados de X_α, que também satisfaz a p.i.f..

Agora, usando a hipótese de que cada X_α é compacto e o fato de que $\{\overline{\pi_\alpha(M_j)} : j \in J\} \subset X_\alpha$ satisfaz a p.i.f., pelo lema 2.4.2, segue que $\bigcap \overline{\pi_\alpha(M_j)} \neq \emptyset$, para todo $M_j \in \mathcal{M}$, isto é,

$$\exists\ x_\alpha \in X_\alpha\ tal\ que\ x_\alpha \in \overline{\pi_\alpha(M_j)}\ para\ todo\ M_j \in \mathcal{M}$$

Portanto, x_α é ponto de acumulação de $\pi_\alpha(M_j)$, para todo $M_j \in \mathcal{M}$, ou seja, para qualquer conjunto aberto $U_\alpha \ni x$ do espaço X_α, temos $U_\alpha \bigcap \pi_\alpha(M_j) \neq \emptyset$ para todo $M_j \in \mathcal{M}$.

Seja $x = (x_\alpha : \alpha \in A)$ o ponto de X que possui como coordenadas os x_α assim obtidos. Vamos mostrar que este x é ponto de acumulação de todo $M_j \in \mathcal{M}$.

Sem perda de generalidade, tomemos U um aberto elementar de $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ contendo x. Pela definição de aberto elementar, temos:

$$U = \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap \pi_{\alpha_m}^{-1}(U_{\alpha_m})$$

onde cada U_{α_k} é um aberto de X_{α_k}. Assim, como $x \in U \Rightarrow \pi_{\alpha_k}(x) = x_{\alpha_k} \in U_{\alpha_k}$. Portanto, do fato acima demonstrado, concluimos que, para cada índice k, e para todo $M_j \in \mathcal{M}$

$$U_{\alpha_k} \cap \pi_{\alpha_k}(M_j) \neq \emptyset$$

e daí resulta que

$$\pi_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k}) \cap M_j \neq \emptyset \; para\ todo \; M_j \in \mathcal{M}$$

Por causa da maximilidade de $\mathcal{M}$, segue da propriedade (iii) de elemento maximal, que:

$$\pi_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k}) \in \mathcal{M} \; para\ k = 1, 2, \ldots, m$$

Como $\mathcal{M}$ satisfaz a propriedade da intersecção finita,

$$U \cap M_j = \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap \pi_{\alpha_m}^{-1}(U_{\alpha_m}) \cap M_j \neq \emptyset \; para\ todo \; M_j \in \mathcal{M}$$

e portanto x é ponto de acumulação de M_j, e assim o teorema está provado.

2.6 Exercícios

1. Demonstre as três propriedades dos conjuntos fechados num espaço topológico (X, τ), isto é, demonstre que:

   (i) $\emptyset$ e X sâo fechados;

   (ii) Se V_α são fechados, para todo $\alpha \in A$, então $\bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha$ é fechado;

   (iii) Se U e V são fechados, então $U \bigcup V$ é fechado. (Dica: Use as leis de De Morgan para mostrar (ii) e (iii)

2. Prove o lema 2.1.3 : O conjunto V é fechado se, e somente se, $V = V$.

3. Demonstre que se $\{\tau_\alpha : \alpha \in A\}$ é uma coleção de topologias num conjunto X, então, a interseção $\bigcap_{\alpha \in A} \tau_\alpha$ é também uma topologia em X.

4. A uniao de topologias τ_α de X é também uma topologia em X. (Em caso afirmativo demonstre, ou de um contra-exemplo).

5. Prove que uma função $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa de todo subconjunto V fechado de Y é fechado em X.

6. Sejam as funções $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ contínuas. Prove que a função composta $gof : X \to Y$ é também contínua.

7. Mostre que se X é separável, então toda sequência convergente em X tem limite único.

8. Seja τ a topologia cofinita num conjunto X. Mostre que (X, τ) é um espaço compacto.

9. Seja U um membro da base definidora para um espaço produto $X = \prod_i X_i$. Mostre que a projeção de U sobre qualquer espaço é aberta.

10. Seja $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ uma coleção de espaços de Hausdorff e $X = \prod_{\alpha \ inA} X_\alpha$ o espaço-produto. Mostre que X é também de Hausdorff.

2.7 Resolução dos Exercícios

1. Demonstração: (i) X e $\emptyset$ são complementares dos conjuntos abertos $\emptyset$ e X respectivamente, logo são fechados. (ii) Seja $U_\alpha = X \setminus V_\alpha$. Assim, cada U_α é aberto em X, logo $U = \bigcup U_\alpha$ é também aberto. Seja $V = \bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha$, como $V_\alpha = X \setminus U_\alpha$, então pela Lei de De Morgan,

$$V = \bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (X \setminus U_\alpha) = X \setminus \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X \setminus U$$

segue que V é complementar de aberto, logo $V = \bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha$ é fechado. (iii) Sejam $W_1 = X \setminus U$ e $W_2 = X \setminus V$ abertos. Logo, $W = W_1 \bigcap W_2$ é aberto e $U \bigcup V = (X \setminus W_1) \bigcup (X \setminus W_2) = X \setminus (W_1 \bigcap W_2) = X \setminus W$, assim segue que $U \bigcup V$ é fechado.

2. Dem: ($\Longleftarrow$) O fecho de qualquer conjunto é4 um subconjunto fechado por ser a intersecção de fechados. Logo, se $V = \overline{V}$, então V é fechado.

   ($\Longrightarrow$) Se V é fechado, então V pertence a família dos fechados de X que contém V, então a intersecção dessa família é V, logo, $\overline{V} = V$.

3. Dem: Vamos mostrar que as três exigências da Def. 2.1.1 são satisfeitas:

(i) Temos que X e $\emptyset$ pertencem a τ_α para todo $\alpha \in A$, logo, pertencem a intersecção $\bigcap\limits_{\alpha\in A} \tau_\alpha$. (ii) Além disso, se $U, V \in \bigcap\limits_{\alpha\in A} \tau_\alpha$, então U e V pertencem a cada $\tau_\alpha, \alpha \in A$. Como cada $\{\tau_\alpha, \alpha \in A\}$ é topologia então $U \bigcap V \in \tau_\alpha$, para todo $\alpha \in A$ e , portanto, $U \bigcap V \in \bigcap\limits_{\alpha\in A} \tau_\alpha$, portanto satisfaz a exigência (3) da def. 2.1.1. (iii) É análogo para a exigência (2).

4. Dem: Falso. Dê um contra-exemplo.

5. Dem: ($\Longrightarrow$) Seja V um subconjunto fechado em Y. Então $Y \setminus V$ é aberto em Y. Desde que f é contínua, temos que $f^{-1}(Y \setminus V)$ é aberto em X. Como $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$ então $f^{-1}(V)$ é fechado.

   ($\Longleftarrow$) Tomemos V fechado em Y. Suponhamos que $f^{-1}(V)$ é fechado em X. Seja U um conjunto aberto em Y. Então, $Y \setminus U$ é fechado em Y e, $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$ é fechado em X, logo $f^{-1}(U)$ é aberto em X e, portanto, f é contínua.

6. Prova: Seja U um aberto de z. Então, $g^{-1}(U)$ é aberto em Y, pois g é contínua. Mas f é também contínua, logo, $f^{-1}(g^{-1}(U))$ é aberto em X. Como $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$, então dado U aberto em z temos $(g \circ f)^{-1}(U)$ aberto em X. Portanto $g \circ f : X \longrightarrow Z$ é contínua.

7. Dem: Seja $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma seqüência. Suponhamos que $\{x_\alpha\}$ converge para a e b, com $a \neq b$. Como X é separável, existe abertos U_1 e U_2 tais que $U_1 \ni a$, $U_2 \ni b$ e $U_1 \bigcap U_2 = \emptyset$. Por hipótese, $\{x_\alpha\} \longrightarrow a$, logo, existe $\alpha_0 \in A$, tal que, para todo $\alpha : \alpha_0 \prec \alpha$, temos $x_\alpha \in U_1$, i.é, U_1 contém quase todos (todos menos um número finito) os termos da seqüência, conseqüentemente, $\{x_\alpha\}$ não pode convergir para b, o que contradiz. Logo, $a = b$.

8. Dem: Seja $U = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ uma cobertura aberta de X. Escolhamos $U_0 \in U$. Com τ é a topologia cofinita, U_o^c é um conjunto finito, digamos $U_0^c = \{a_1, ..., a_m\}$. Como U é cobertura de X, para cada $a_k \in U_0^c$, existe $U_{\alpha_k} \in U$ tal que $a_k \in U_{\alpha_k}$. Logo, $U_0^c \subset U_{\alpha_1} \bigcup ... \bigcup U_{\alpha_m}$ e $X = U_0 \bigcup U_0^c = U_0 \bigcup U_{\alpha_1} \bigcup ... \bigcup U_{\alpha_m}$. Assim, X é compacto.

9. Dem: Como U pertence à base definidora para X,

$$U = \{X_\alpha : \alpha \neq \alpha_1, ..., \alpha_m\} \times U_{\alpha_1} \times ... \times U_{\alpha_m}$$

onde U_{α_k} é um aberto de X_{α_k}. Então, para qualquer projeção $\pi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$,

$$\pi_\alpha(U) =$$

Em qualquer caso, $\pi_\alpha(U)$ é um aberto.

10. Dem: Sejam $x = (x_\alpha : \alpha \in A)$ e $y = (y_\alpha : \alpha \in A)$ pontos distintos em X. Então, x e y devem diferir em, ao menos, um espaço coordenado, digamos X_{j_0}, i.é, $a_{j_0} \neq b_{j_0}$. Mas por hipótese, X_{j_0} é de Hausdorff, logo, existem abertos disjuntos U e V de X_{j_0} tais que $a_{j_0} \in U$ e $b_{j_0} \in V$. Por definição de espaço-produto, a projeção $\pi_{j_0} : X \longrightarrow X_{j_0}$ é contínua. Conseqüentemente, $\pi_{j_0}^{-1}(U)$ e $\pi_{j_0}^{-1}(V)$ são abertos disjuntos de X contendo x e y respectivamente. Logo, X é também de Hausdorff.

Capítulo 3

Espaços Métricos

3.1 Propriedades Básicas

Definição 3.1.1. *Seja X um conjunto. A função $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ é chamada distância em X se:*

1)$\rho(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$ *e* $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$*;*
2)$\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in X$ *;*
3)$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \forall x, y, z \in X$*.*
Se $\rho(x, y)$ é uma distância em X, a dupla (X, ρ) é chamada espaço métrico.

Exemplos:

1) X qualquer conjunto e

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

2) $(\mathbb{R}, \rho)$, $\rho(x, y) = |x - y|$;
3) $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$, $\rho_2(x, y) = (\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2)^{1/2}$;
Tarefa: Provar as desigualdades de Cauchy-Schwartz e a do triângulo.
4) $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$, $\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$;
5) $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$, $\rho_\infty(x, y) = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|$;
6) $(C[a, b], \rho(f, g))$ $\rho(f, g) = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$;

Vamos apresentar apenas a provar o item 6. Seja então:

1) $\rho(f,g) \geq 0$ (trivial). Agora, $\rho(f,g) = 0 \Longrightarrow \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| = 0 \Longrightarrow$ $|f(x) - g(x)| = 0 \Longrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = g(x)$, para quaisquer $f, g \in C[a,b]$.

2) $\rho(f,g) = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |(-1)(g(x) - f(x))| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |g(x) - f(x)| =$ $\rho(f,g)$, para toda $f, g \in C[a,b]$.

3) $\rho(f,g) = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \leq$ $\sup\limits_{x\in[a,b]} \{|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|\} \leq^{f,g,h\in C[a,b]} \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - h(x)| + \sup\limits_{x\in[a,b]} |h(x) - g(x)| =$ $\rho(f,h) + \rho(g,h)$, para quaisquer $f, g, h \in C[a,b]$

Logo, $\rho(f,g)$ é uma distancia.

7) $L_2[a,b] = (L_2[a,b], \rho)$, onde $L_2[a,b]$ denota o espaço das funções$f \ : \ [a,b] \to \mathbb{R}$ que satisfazem $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$, e $\rho(f,g) = (\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt)^{1/2}$
Provar que $\rho(f,g)$ é distância.

Definição 3.1.2. *Seja* $x_0 \in X$ *e* $r \in \mathbb{R}_+$. *O conjunto*

$$B(x_0, r) = \{x \ : \ \rho(x_0, x) < r\}$$

é chamado de bola aberta de centro x_0 *e raio* r.
Da mesma forma,

$$B[x_0, x] = \{x \ : \ \rho(x_0, x) \leq r\} \quad e \quad S(x_0, r) = \{x \ : \ \rho(x_0, x) = r\}$$

são chamados de bola fechada e de esfera de centro x_0 *e raio* r*, respectivamente.*

Definição 3.1.3. *O conjunto* $U \subset (X, \rho)$ *é chamado aberto se, para todo ponto* $x_0 \in U$*, existe* $r > 0$*, tal que* $B(x_0, r) \subset U$.

Definindo os conjuntos abertos desta forma, de fato definimos topologia τ em (X, ρ).

Lema 3.1.1. *O espaço métrico* (X, ρ)*, com a topologia* τ *introduzida através da definição acima, torna se um espaço topológico.*

Demonstração:
1) Primeiramente, temos que verificar que qualquer união de abertos é aberto. Sejam, para todo $\alpha \in A$, U_α conjuntos abertos em (X, ρ). Portanto, para todo $\alpha \in A$, e para todo $x \in U_\alpha$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U_\alpha$. Se

$x \in \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$, então $x \in U_{\alpha_0}$, para pelo menos $\alpha_0 \in A$. Então, existe $r_0 > 0$ com $B(x, r_0) \subset U_{\alpha_0}$ e consequentemente $B(x, r_0) \subset \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$.
2) Agora provemos que a intersecção de dois abertos também é aberto. Sejam U_1 e U_2 conjuntos abertos e $x \in U_1 \cap U_2$. Desde que U_1 e U_2 são abertos, existem bolas abertas $B(x, r_1) \subset U_1$ e $B(x, r_2) \subset U_2$. Considerando $r = \min(r_1, r_2)$, obviamente $B(x, r) \subset U_1 \cap U_2$. •

Desta forma provamos que todo espaço métrico é espaço topológico. Existem, entretanto, espaços topológicos que não são métricos. Neste caso dizemos que a topologia não é metrisável.

Forneça exemplos de espaços topológicos que não são metrisáveis.

Lema 3.1.2. *Toda bola aberta $B(x_0, r)$ é um conjunto aberto.*

Demonstração:
Sejam $y \in B(x_0, r)$ um ponto arbitrário e $d := (r - \rho(x_0, y))/2$. Considere $B(y, d)$, a bola aberta de centro y e raio d. Para todo $z \in B(y, d)$, temos

$$\rho(x_0, z) \leq \rho(x_0, y) + \rho(y, z) \leq \rho(x_0, y) + d = r - 2d + d = r - d < r.$$

Portanto, $B(y, d) \subset B(x_0, r)$. •

Definição 3.1.4. *Seja $\{x_n\}$ uma sequência de pontos de (X, ρ) e $x \in X$. Dizemos que $x_n \to x$ se $\rho(x_n, x) \to 0$ quando $n \to \infty$.*

Lema 3.1.3. *Seja X um espaço métrico e $F \subset X$. Então, F é fechado se, e somente se, para toda sequência convergente $\{x_n\}$ de pontos de F que converge para x, segue que $x \in F$.*

Lema 3.1.4. *Toda bola fechada $B[x_0, r]$ em (X, ρ) é um conjunto fechado.*

Demonstração:
Basta provar que o complementar é aberto.

Definição 3.1.5. *Seja $A \subset X$. A distância $\rho(x, A)$ é dada por*

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) \ : \ y \in A\}.$$

Exemplo 3.1.1. *Se $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ é um conjunto finito, então $\rho(x, A)$ é o menor dos n números $\rho(x, a_1), \ldots, \rho(x, a_n)$.*

Lema 3.1.5. *Temos que $\rho(x, A) = 0$ se, e somente se, $x \in \bar{A}$.*

Demonstração:
($\Rightarrow$) Desde que $\rho(x, A) = 0$, então existe uma sequência $\{y_n\}$ de pontos de A,

tal que $\rho(y_n, x) \leq 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto significa que $\rho(y_n, x) \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto, x é ponto de aderência o que implica em $x \in \bar{A}$.
$(\Leftarrow)$ Seja $x \in \bar{A}$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência de pontos $y_n \in A$, tal que $y_n \in B(x, 1/n)$. Isto significa que $\rho(x, y_n) < 1/n$. Então, $\rho(x, A) = 0$. •

Teorema 3.1.1. *Seja A um conjunto dado. Então a função $\rho(x, A)$ é uma função contínua da variável x.*

Demonstração:
Seja $\{x_n\}$ uma sequência de pontos de X que converge para $x_0 \in X$. Isto significa que $\rho(x_n, x) \to 0$. Temos que provar que $\rho(x_n, A) \to \rho(x_0, A)$. Para este propósito, observe que, para todo $y \in A$, a desigualdade do triângulo implica em

$$\begin{aligned} \rho(x_n, y) &\leq \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, y) \\ \rho(x_0, y) &\leq \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, y). \end{aligned}$$

Tomando os infimuns, com respeito a $y \in A$, dos dois lados das desigualdades acima, obtemos

$$\begin{aligned} \inf_{y \in A} \rho(x_n, y) &\leq \rho(x_n, x_0) + \inf_{y \in A} \rho(x_0, y) \\ \inf_{y \in A} \rho(x_0, y) &\leq \rho(x_0, x_n) + \inf_{y \in A} \rho(x_n, y). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \rho(x_n, A) &\leq \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, A) \\ \rho(x_0, A) &\leq \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, A). \end{aligned}$$

Estas desigualdades são equivalentes à

$$|\rho(x_n, A) - \rho(x_0, A)| \leq \rho(x_n, x_0).$$

Desde que $\rho(x_n, x_0) \to 0$, então $\rho(x_n, A) \to \rho(x_0, A)$. •

Teorema 3.1.2. (Uryshon) *Seja (X, ρ) um espaço métrico e A e B conjuntos fechados de X, com $A \cap B = \emptyset$. Então, existe uma função $f \in C(X)$, tal que $f\mid_A \equiv 0, f\mid_B \equiv 1$ e $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in X$.*

Demonstração:
Basta considerar $f(x) = \frac{\rho(x,A)}{\rho(x,A)+\rho(x,B)}$.

Corolário 3.1.1. *Todo espaço métrico é normal.*

Demonstração:
Sejam A e B conjuntos fechados de X, onde $A \cap B = \emptyset$. Temos que encontrar conjuntos abertos $U, V \subset X$, tais que $U \supset A$, $V \supset B$ e $U \cap V = \emptyset$. É fácil verificar que estas exigências são satisfeitas pelos conjuntos $U = \{x \in X \ : \ f(x) < 1/2\}$ e $V = \{x \in X \ : \ f(x) > 1/2\}$.

3.2 Espaços Métricos Completos

Definição 3.2.1. *Seja (X, ρ) um espaço métrico. A sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é fundamental se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que, para todos $m, n > N$, temos $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Uma definição equivalente é a seguinte:
A sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é fundamental se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que, para quaisquer $n > N$ e $p \in \mathbb{N}$, temos $\rho(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$.

Definição 3.2.2. *O espaço métrico (X, ρ) é chamado completo se toda sequência fundamental $\{x_n\}$ de pontos de X converge para um elemento $x \in X$.*

Em outras palavras, (X, ρ) é completo se, para toda sequência $\{x_n\}$ que é fundamental, existe $x \in X$, tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $n > n_0$, temos $\rho(x_n, x) < \varepsilon$.

Exemplos:

1) $(\mathbb{R}, \rho)$ onde $\rho(x, y) = |x - y|$ é completo;
2) $((0, 1], \rho)$, com $\rho(x, y) = |x - y|$ não é completo;
3) $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$, $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$ e $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$ são completos;
4) $(C[a, b], \rho(f, g))$, com $\rho(f, g) = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$ é completo;
5) $(C[a, b], \rho(f, g))$, onde $\rho(f, g) = (\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt)^{1/2}$ não é completo;
De fato, sejam $[a, b] = [0, 1]$ e

$$f_n(t) = \begin{cases} 2nt & \text{se } 0 \le t \le 1/(2n), \\ 2 - 2nt & \text{se } 1/(2n) \le t \le 1/n, \\ 0 & \text{se } 1/n \le t \le 1. \end{cases}$$

Usando a desigualdade do triângulo e o fato que

$$\int_0^1 f_n^2(t)\, dt = 1/(3n),$$

obtemos

$$\rho(f_m, f_n) \le \rho(f_m, 0) + \rho(f_n, 0) = 1/\sqrt{3m} + 1/\sqrt{3n}.$$

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Defina $N = [4/(3\varepsilon^2)] + 1$. Então, se $m, n > N$, temos

$$\rho(f_m, f_n) \le \frac{1}{\sqrt{3m}} + \frac{1}{\sqrt{3n}} < \frac{2}{\sqrt{3N}} < \varepsilon.$$

Portanto, a sequência de funções f_n é fundamental. Se o limite f existe, então $f(t) \equiv 0$.

Definição 3.2.3. *Seja $U \subset (X, \rho)$ um conjunto limitado. Então*

$$d(U) = \sup_{x,y \in U} \rho(x, y)$$

é diâmetro de U.

Provemos agora o Teorema de Cantor.

Teorema 3.2.1. (Cantor) *Sejam (X, ρ) um espaço métrico completo e a sequência de conjuntos fechados $F_n \subset X$, tais que*

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots, \qquad d(F_n) \longrightarrow 0.$$

Então, existe um único ponto $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Demonstração:

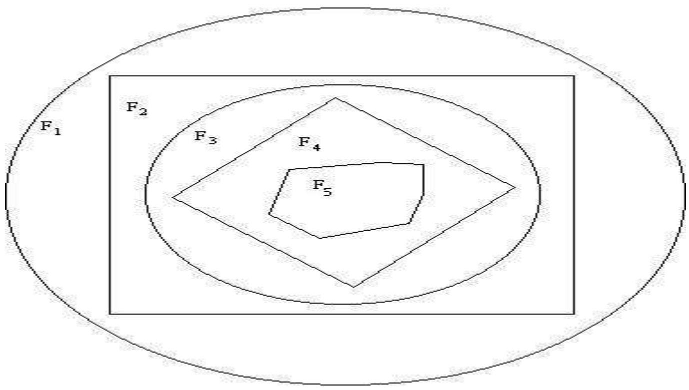

Figura 1

Primeiramente estabeleceremos a existência. Seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, o ponto $x_n \in F_n$. Portanto, para todo $p \in \mathbb{N}$, temos $x_{n+p} \in F_{n+p} \subset F_n$. Consequentemente,

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \le d(F_n) \to 0.$$

Formalmente, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $n > N$ e para todo $p \in \mathbb{N}$, temos $\rho(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$. Desde que X e completo, existe $x \in X$, tal que $\rho(x_n, x) \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$. Provemos agora, que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, isto é, que $x \in F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja o número natural n_0 arbitrário. Sabemos que $x_n \in F_{n_0}$ para todo $n \geq n_0$, o conjunto F_{n_0} é fechado e $x_n \to x$. Portanto, temos que ter $x \in F_{n_0}$.

Para provarmos a unicidade, suponha que existem $x \neq y$ com a propriedade da conclusão do teorema, isto é, que $x, y \in F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A desigualdade do triângulo implica que

$$\rho(x, y) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_n, y) \leq 2d(F_n) \to 0.$$

Consequentemente $\rho(x, y) = 0$ e, pela primeira propriedade da distância, segue que $x = y$. •

A hipótese que $d(F_n) \to 0$ no Teorema de Cantor é essencial, com mostra o seguinte exemplo: Sejam $X = \mathbb{R}$,

$$\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

e $F_n = [n, \infty)$. Temos que $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$ e $d(F_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Provar que a função $\rho(x, y)$ definida acima, é realmente uma distância.

O nosso proximo objetivo e provar o celebre Teorema de Baire sobre as categorias.

Teorema 3.2.2. (Teorema de Baire) *Sejam (X, ρ) um espaço métrico completo e os conjuntos fechados $F_n \subset X$, tais que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Então, existem $n_0 \in \mathbb{N}$, um ponto $y \in F_{n_0}$ e $\varepsilon > 0$, tais que $B(y, \varepsilon) \subset F_{n_0}$.*

Demonstração:

Suponha o contrario, isto é, que a sequência $\{F_n\}$ satisfaz as exigências do teorema mas nenhum F_n possui ponto interior.

Seja $x_1 \in X \setminus F_1$ que é aberto. Portanto, é ponto interior e existe uma bola, tal que $B(x_1, \varepsilon_1) \subset X \setminus F_1$. Além disso, podemos escolher $\varepsilon_1 \leq 1$ suficientemente pequeno, que $B[x_1, \varepsilon_1] \bigcap F_1 = \emptyset$.

Desde que F_2 não possui pontos interiores, então $B(x_1, \varepsilon_1) \setminus F_2 \neq \emptyset$. Portanto, existe um ponto $x_2 \in B(x_1, \varepsilon_1)$ mas $x_2 \notin F_2$. Desde que $B(x_1, \varepsilon_1) \setminus F_2$ é aberto, existe $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, $\varepsilon_2 \leq 1/2$, tal que $B[x_2, \varepsilon_2] \subset B[x_1, \varepsilon_1]$ e $B[x_2, \varepsilon_2] \bigcap F_2 = \emptyset$.

Usando este raciocínio, construímos a sequência $\{x_n\}$ de pontos, junto com a sequência $\{\varepsilon_n\}$ de números positivos com as seguintes propriedades:

$$B[x_n,\varepsilon_n]\bigcap F_n=\emptyset,\quad \varepsilon_n\leq 1/n,\quad x_n\notin\bigcup_{k=1}^{n}F_k.$$

Logo, construímos a sequência de fechados $B[x_n,\varepsilon_n]$, tais que

$$B[x_n,\varepsilon_n]\subset B[x_{n-1},\varepsilon_{n-1}],\qquad \varepsilon_n\to 0.$$

Aplicando o teorema de Cantor aos $B[x_n,\varepsilon_n]$, concluimos que existe um único ponto $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}B[x_n,\varepsilon_n]$. Portanto, temos que $x\in X$ e $x\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, o que é um absurdo, pois por hipótese, $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$.

De fato $x\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, pois se $x\in F_{n_0}$ para algum n_0, desde que $x\in B[x_{n_0},\varepsilon_{n_0}]$, teríamos

$$x\in B[x_{n_0},\varepsilon_{n_0}]\bigcap F_{n_0},$$

o que é um absurdo, pois, pela construção, $B[x_{n_0},\varepsilon_{n_0}]\bigcap F_{n_0}=\emptyset$. •

Utilizaremos o Teorema de Baire para provarmos a existência de funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto. Recomendamos ao leitor construir um exemplo de tal função. Dois tais exemplos são devidos a Weierstrass e Van der Warden.

Teorema 3.2.3. *Existe uma função $f\in C[0,1]$ que não é diferenciável em nenhum ponto x de $[0,1]$.*

Demonstração:
Consideramos o espaço $X=C[0,1]$ equipado com a distância uniforme. Provaremos na seção 3.4 que este espaço é completo. Sejam os conjuntos $F_n\subset X$, definidos por

$$F_n=\left\{f\in C[0,1]\ :\ \exists\ x\in[0,1]:\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\leq n\ \forall\ h\neq 0\ \ :x+h\in[0,1]\right\}.$$

1) Primeiramente, vamos provar que F_n é fechado. Seja $I=[0,1]$ e

$$B_n=F_n^c=\left\{f\in X:\forall\ x\in I,\ \exists\ h\neq 0:\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|>n:x+h\in I\right\}$$

Dessa forma, se $f\in B_n$, então para todo $x\in I$, $\exists h\neq 0$, tal que

$$\rho(x,h)=|f(x+h)-f(x)|-n|h|>0.$$

Vamos provar que B_n é aberto.

Afirmamos que existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $x \in I$, $\exists\, h \neq 0$, com $\rho(x,h) > \epsilon$. Com efeito, caso contrário existiria, para cada $k \in \mathbb{N}$, algum $x_k \in I$ tal que $\rho(x_k, h) \leq 1/k$, seja qual for h. Como I é compacto, toda sequência em I possui subsequência convergente. Seja $\{x_{k_n}\}$ uma subsequência de $\{x_k\}$, tal que $x_{n_k} \to x_0 \in I$. Para não carregar demais em notações, tome, sem perca de generalidade, $\{x_{k_n}\} = \{x_k\}$. Como ρ é contínua, concluímos que, para todo h, temos que $\rho(x_0, h) = \lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_k, h) \leq \lim\limits_{k\to\infty} 1/k = 0$, o que, pela definição de $\rho(x,h)$, é uma contradição. Obtido então o número $\epsilon > 0$, afirmamos que $g \in X$, $\|g - f\| < \epsilon/2 \Rightarrow g \in B_n$. Com efeito, para todo $x \in I$, existe $h \neq 0$ tal que

$$\begin{aligned}n.|h| + \epsilon < |f(x+h) - f(x)| \leq |f(x+h) - g(x+h)| + |g(x+h) - g(x)| + \\ + |g(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + |g(x+h) - g(x)| + \frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

ou seja, $|g(x+h) - g(x)| > n.|h|$. Isto mostra que $g \in B_n$, e portanto B_n é aberto em X. Logo, F_n é fechado.

Provado que F_n é fechado, basta mostrar que o interior de F_n é vazio. Aí então, aplicamos o Teorema de Baier.

Provar que o interior de F_n é vazio, é equivalente a mostrar que o complementar de F_n é denso em X. De fato:

Se F_n^c é denso em X, então $\overline{F_n^c} = X$. Assim, temos $\emptyset = X^c = (\overline{F_n^c})^c = \text{int}(F_n^c)^c = \text{int}F_n$.

2) Vamos mostrar então que F_n^c é denso em X. Utilizaremos o fato de que toda função contínua, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida num intervalo limitado e fechado, é uniformemente contínua. Dados arbitrariamente $\epsilon > 0$, e $f \in X$, mostraremos que existe $g \in F_n^c$ tal que $\|g - f\| < \epsilon$. Pela continuidade uniforme de f, existe um número $\delta > 0$, tal que, para quaisquer $x,\ y \in [0,1]$, se $|x - y| < \delta$ então $|f(y) - f(x)| < \epsilon$. Portanto, se subdividirmos o intervalo $[0,1]$ num número finito de subintervalos $I_1,\ I_2, \ldots,\ I_r$ de comprimentos menores do que δ, o gráfico de f, em cada um desses intervalos, cabe num retângulo de altura menor que ϵ.

Construímos agora uma função contínua $g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Fazendo com que g coincida com f nas extremidades de cada intervalo I_j e, no interior de cada I_j, o gráfico de g tem a forma de uma serra cujos dentes têm arestas com inclinação $>\ n$ e estão contidos num retângulo de base I_j e altura $< \epsilon$ que contenha o gráfico de $f|I_j$, temos que g cumpre as condições $\|g - f\| < \epsilon$ e $g \in F_n^c$, como mostra a figura abaixo.

Assim, F_n^c é denso em X.

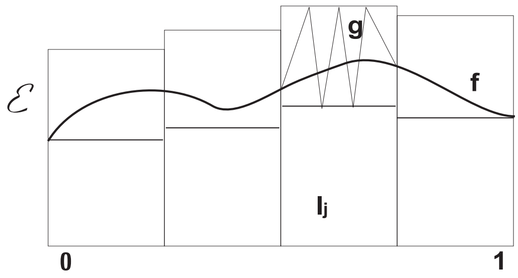

Figura 2

Portanto, a partir de 1) e 2), e aplicando o Teorema de Baire, temos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \nsubseteq X.$$

Em outras palavras, a união dos conjuntos F_n não cobre X. Logo, existe $f \in X$ que não pertence a nenhum F_n. Consequentemente, existe uma função contínua f, tal que, para todo $x \in [0,1]$,

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| > n.$$

Portanto, essa função f não é diferenciável em nenhum ponto do intervalo $[0,1]$. •

Definição 3.2.4. *Seja (X, ρ) um espaço métrico e $A : X \to X$ um operador em X. Ele é chamado operador de contração, ou simplesmente contração, se existe q, $0 < q < 1$, tal que, para quaisquer $x, y \in X$, temos*

$$\rho(Ax, Ay) \leq q\ \rho(x, y).$$

Teorema 3.2.4. *(Teorema do Ponto Fixo de Banach) Seja (X, ρ) um espaço métrico completo e A um operador de contração em X. Então, existe um único ponto $\xi \in X$, tal que $A\xi = \xi$.*

Demonstração:
Seja $x \in X$ um ponto qualquer. Consideremos a sequência $\{x_n\}$, construida através da consecutiva aplicação do operador A: $x_1 = Ax$, $\ldots x_{n+1} = Ax_n, \ldots$.

Então,

$$\begin{array}{rcl}
\rho(x_1,x_2) & = & \rho(Ax,Ax_1) \leq q\ \rho(x,x_1) \\
\rho(x_2,x_3) & = & \rho(Ax_1,Ax_2) \leq q\ \rho(x_1,x_2) \leq q^2\ \rho(x,x_1) \\
\rho(x_3,x_4) & = & \rho(Ax_2,Ax_3) \leq q\ \rho(x_2,x_3) \leq q^3\ \rho(x,x_1) \\
\cdots\cdots\cdots & . & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\rho(x_n,x_{n+1}) & \leq & q^n\ \rho(x,x_1) \\
\rho(x_{n+1},x_{n+2}) & = & \rho(Ax_n,Ax_{n+1}) \leq q\ \rho(x_n,x_{n+1}) \leq q^{n+1}\ \rho(x,x_1).
\end{array}$$

Daí, pela desigualdade do triângulo, obtemos

$$\begin{array}{rcl}
\rho(x_n,x_{n+p}) & \leq & \rho(x_n,x_{n+1}) + \rho(x_{n+1},x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{n+p-1},x_{n+p}) \\
& \leq & \left(q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{n+p-1}\right)\rho(x,x_1) \\
& = & q^n\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{p-1}\right)\rho(x,x_1) \\
& = & q^n\frac{1-q^p}{1-q}\rho(x,x_1).
\end{array}$$

Desde que, para qualquer p fixo, a última quantidade converge para zeros, quando n vai para o infinito, então $\rho(x_n,x_{n+p}) \to 0$ quando $n \to \infty$. Isto significa que $\{x_n\}$ é fundamental. Desde que X é completo, existe $\xi \in X$, tal que $x_n \to \xi$. Primeiramente mostremos que ξ é ponto fixo para A. Desde que $x_n \to \xi$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\nu \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $n > \nu$, temos $\rho(x_n,\xi) < \varepsilon/2$. Seja n um tal número natural. Então,

$$\begin{array}{rcl}
\rho(A\xi,\xi) & \leq & \rho(A\xi,x_{n+1}) + \rho(x_{n+1},\xi) \\
& = & \rho(A\xi,Ax_n) + \rho(x_{n+1},\xi) \\
& \leq & q\rho(\xi,x_n) + \rho(x_{n+1},\xi) \\
& < & \varepsilon.
\end{array}$$

Consequentemente, $\rho(A\xi,\xi) = 0$ e $A\xi = \xi$.

Para provarmos a unicidade do ponto fixo, suponha que existam números ξ e η, tais que $A\xi = \xi$ e $A\eta = \eta$. Assim,

$$\rho(\xi,\eta) = \rho(A\xi,A\eta) \leq q\rho(\xi,\eta),$$

o que é equivalente à desigualdade $(1-q)\rho(\xi,\eta) \leq 0$. Desde que $1-q > 0$ e $\rho(\xi,\eta) \geq 0$, isto é possível somente quando $\rho(\xi,\eta) = 0$, isto é, quando $\xi = \eta$. •

Vejamos agora uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach, que consiste em mostrar a existência de solução de um problema de valor inicial, o qual será apresentado no teorema a seguir.

Teorema 3.2.5. *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida num aberto Ω do plano (x,y). Suponhamos que a derivada parcial com relação à segunda* *variável,* $f_y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$*, seja contínua também. Então, para cada* $(x_0, y_0) \in \Omega$*, existem um intervalo aberto* I *contendo* x_0 *e uma única função diferenciável* $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *com* $(x, \phi(x)) \in \Omega$*, para todo* $x \in I$*, que é solução do problema de valor inicial*

$$y' = f(x, y) \tag{3.2.1}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{3.2.2}$$

Demonstração

O primeiro passo na demonstração deste teorema é a transformação do problema de valor inicial no problema de resolução de uma equação integral, o que se faz no lema a seguir.

Lema 3.2.1. *Seja* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua num aberto* Ω *do plano* (x, y)*. Então, a função diferenciável* $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma solução do problema de valor inicial (3.2.1)-(3.2.2) se, e somente se for uma solução da equação integral*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds, \quad x \in I. \tag{3.2.3}$$

Demonstração

($\Rightarrow$) Se ϕ é solução do problema de valor inicial, (3.2.1)-(3.2.2), pelo Teorema Fundamental do Cálculo, ϕ é solução da equação integral (3.2.3).

($\Leftarrow$) Reciprocamente, se $\phi : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que é solução da equação integral (3.2.3), então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, ϕ é diferenciável e é também solução do problema de valor inicial (3.2.1)-(3.2.2). •

Vamos nos concentrar agora na resolução da equação integral (3.2.3). Dado $(x_0, y_0) \in \Omega$, tomemos a e b positivos tais que o retângulo

$$B = B(a, b, x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a \text{ e } |y - y_0| \leq b\} \tag{3.2.4}$$

esteja contido em Ω. Como f é contínua e B é compacto (i.e., fechado e limitado), temos que f é limitada em B. Seja

$$M = \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in B\}.$$

Sejam

$$0 < \bar{a} \leq \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

e

$$J_{\bar{a}} \text{ o intervalo fechado } [x_0 - \bar{a}, x_0 + \bar{a}].$$

Seja $\mathcal{C}$ o conjunto de todas as funções contínuas $g : J_{\bar{a}} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $g(x_0) = y_0$ e $|g(x) - y_0| \leq b$. Graficamente, queremos em $\mathcal{C}$ as funções contínuas cujos gráficos passem pelo ponto (x_0, y_0) e que estejam contidos no retângulo B.

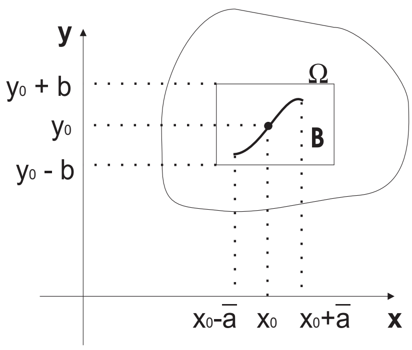

Figura 3

Vamos definir em $\mathcal{C}$ a seguinte distância:

$$\rho(g_1, g_2) = \max\{|g_1(x) - g_2(x)| : x \in J_{\bar{a}}\}. \tag{3.2.5}$$

Como provado na seção 3.1, temos que (3.2.5) é, de fato, uma distância.

Pela Proposição **??**, $(\mathcal{C}, \rho)$ é um espaço métrico completo.

Seja $\Phi : \mathcal{C} \to C[x_0 - \bar{a}, x_0 + \bar{a}]$, onde para cada função $y \in \mathcal{C}$, temos que $\Phi(y(x)) = g(x)$, com $g(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$. Provemos que, para todo $y \in \mathcal{C}$, temos que $\Phi(y) \in \mathcal{C}$.

Observe que $g(x)$ é uma função contínua para $x \in J_{\bar{a}}$, que $g(x_0) = y_0$ e que

$$|g(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, y(s))| \, ds \right| \leq M|x - x_0| \leq M\bar{a} \leq b$$

e consequentemente $g \in \mathcal{C}$. Logo $\Phi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$.

A equação (3.2.3) pode ser escrita na forma funcional

$$y = \Phi(y).$$

Portanto, as soluções de (3.2.3) são os pontos fixos de Φ. A idéia agora é usar o Teorema do Ponto Fixo de Banach. A fim de aplicar este teorema ao problema que estamos estudando, resta apenas verificar se Φ é uma contração. Para tal, escrevemos

$$|\Phi(g_1)(x) - \Phi(g_2)(x)| = \Big| \int_{x_0}^{x} [f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))] ds \Big|. \tag{3.2.6}$$

Para estimar o integrante no segundo membro de (3.2.6), usamos o resultado do lema abaixo, o qual não apresentaremos a demonstração. Veja pag 55, Figueiredo, D. Guedes de e outro, "Equações Diferenciais Aplicadas", A.I.N.M.P.A, 2001.

Lema 3.2.2. *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um aberto Ω do plano (x, y) e tal que a derivada parcial $f_y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ seja também contínua. Dado um subconjunto limitado $\Omega_0 \subset \overline{\Omega}_0 \subset \Omega$, existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2| \tag{3.2.7}$$

para todos $(x, y_1),\ (x, y_2) \in \overline{\Omega}_0$.

Usando este lema, obtemos

$$|\Phi(g_1)(x) - \Phi(g_2)(x)| \leq K \Big| \int_{x_0}^{x} |g_1(s)) - g_2(s)| ds \Big| \leq K\bar{a}\rho(g_1, g_2)$$

e daí

$$\rho(\Phi(g_1), \Phi(g_2)) \leq K\bar{a}\rho(g_1, g_2).$$

Concluímos que Φ é uma contração se $K\bar{a} < 1$. Logo, basta tomar $\bar{a} < 1/K$. E o Teorema 3.2.5 fica demonstrado com $I = (x_0 - \bar{a}, x_0 + \bar{a})$. •

3.3 Compactos em Espaços Métricos

3.3.1 Teorema de Hausdorff

Definição 3.3.1. *Seja (X, ρ) um espaço métrico e $A, B \subset X$. Dizemos que A é ε-rede para B se, para todo $b \in B$, existe $a \in A$, tal que $\rho(a, b) \leq \varepsilon$.*

Uma afirmação equivalente desta definição é que A é ε-rede para B se

$$\bigcup_{a\in A} B[a,\varepsilon] \supset B.$$

Terceira maneira de definir esta noção é a seguinte: A é ε-rede para B se

$$\sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\rho(a,b) \le \varepsilon.$$

Exemplo:
Seja $B = \mathbb{R}^2$. Então,

$$A = \sqrt{2}\,\varepsilon\,\mathbb{Z}^2 = \Big\{(\sqrt{2}\varepsilon x_1, \sqrt{2}\varepsilon x_2)\ :\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\Big\}$$

é ε-rede para B.

A ε-rede é chamada finita se ela consiste de um número finito de pontos.

Provemos o Teorema de Hausdorff.

Teorema 3.3.1. (Hausdorff) *Sejam (X,ρ) um espaço métrico. O conjunto $M \subset X$ possui ε-rede finita para todo $\varepsilon > 0$ se, e somente se, de toda sequência $\{x_n\}$ de pontos de M pode ser escolhida uma subsequência fundamental.*

Demonstração:
($\Leftarrow$) Suponha que existe $\varepsilon > 0$, tal que M não tem ε-rede finita.

Seja $x_1 \in M$. Desde que este ponto não é ε-rede para M, existe $x_2 \in M$, tal que $\rho(x_1,x_2) > \varepsilon$. Desde que os dois pontos x_1 e x_2 não formam ε-rede para M, existe $x_3 \in M$, tal que $\rho(x_1,x_3) > \varepsilon$ e $\rho(x_2,x_3) > \varepsilon$. Continuando este racocínio, construimos a sequência $\{x_n\}$ de pontos de M, tais que $\rho(x_j,x_k) > \varepsilon$ sempre quando $j \ne k$. Isto significa que para todo $N \in \mathbb{N}$ existem $m,n > N$, tais que $\rho(x_m,x_n) > \varepsilon$. Portanto a sequência $\{x_n\}$ não possui subsequências fundamentais. Absurdo!

($\Rightarrow$) Se $\varepsilon = 1/n$, então M tem ε-rede finita. Então, existem um número finito de bolas $B_1^{(n)}, B_2^{(n)}, \ldots, B_{m(n)}^{(n)}$, todas com raio $1/n$, de modo que $\bigcup_{j=1}^{m(n)} B_j^{(n)} \supset M$.

Seja $\{x_n\}$ uma sequência qualquer de pontos de M.

Vamos construir, por indução, a sequência de conjuntos U_n, tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$:

a) $U_n \supset U_{n+1}$;

b) O conjunto U_n contem um número infinito de pontos da sequência $\{x_n\}$;

c) $d(U_n) < 2/n$.

Se $n = 1$, existem bolas $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \ldots, B_{m(1)}^{(1)}$, todas com raio 1, de modo que $\bigcup_{j=1}^{m(1)} B_j \supset M$. Seja B_k uma destas bolas. Tomemos $U_1 = M \cap B_k$. Obviamente $d(U_1) < 2$. Desde que $U_1 \subset M$, então U_1 possui ε-rede finita para todo ε.

Suponha que temos escolhido os conjuntos $U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n$ e que U_n satisfaz as exigências b) e c). Vamos construir U_{n+1}. Seja $\varepsilon = 1/(n+1)$. Desde que $U_n \subset M$, ele possui $1/(n+1)$-rede finita. Em outras palavras, existem bolas $B_1^{(n)}, B_2^{(n)}, \ldots, B_{m(n)}^{(n)}$, todas com raio $1/(n+1)$, tais que

$$B_1^{(n)} \cup B_2^{(n)} \cup \ldots \cup B_{m(n)}^{(n)} \supset U_n.$$

Desde que U_n contem um número finito de elementos de $\{x_n\}$, existe um $j,\ 1 \leq j \leq m(n)$, tal que $B_j^{(n)} \cap U_n$ contem um número infinito de elementos de $\{x_n\}$. Seja, então $U_{n+1} := B_j^{(n)} \cap U_n$. Obviamente $U_{n+1} \subset U_n$ e U_{n+1} satisfaz b) e c).

Vamos escolher a subsequência de $\{x_n\}$ de modo que $x_{k_1} \in U_1, x_{k_2} \in U_2, \ldots, x_{k_n} \in U_n$. Temos que mostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe um número natural N, tal que, para quaisquer $m, n > N$, temos $\rho(x_{k_m}, x_{k_n}) < \varepsilon$. Se $N = [2/\varepsilon] + 1$, então $N > 2/\varepsilon$, o que é equivalente a $2/N < \varepsilon$. Assim, $x_{k_m}, x_{k_n} \in U_N$ e portanto $\rho(x_{k_m}, x_{k_n}) \leq d(U_N) < 2/N < \varepsilon$. •

3.3.2 Caracterizações dos Compactos em Espaços Métricos

Teorema 3.3.2. *Seja (X, ρ) um espaço métrico e $K \subset X$ um conjunto fechado. Então, K é compacto se, e somente se, todo sistema centralizado de subconjuntos fechados de K tem intersecção não-vazia.*

Teorema 3.3.3. *Seja (X, ρ) um espaço métrico. Se $K \subset X$ é compacto, então K é fechado.*

Teorema 3.3.4. *Seja (X, ρ) um espaço métrico. O conjunto $K \subset X$ é compacto se, e somente se, toda sequência $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ de pontos de K possui subsequência convergente $\{x_{k_j}\}$ cujo limite está em K.*

<u>Demonstração</u>:

($\Rightarrow$) Suponha o contrário, que exista um asequência $\{x_n\}$ de que não possa ser escolhida subsequência convergente em K. Sejam $F_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. A família dos conjuntos $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ é um sistema centralizado. De fato, considere $F_{n_1}, \ldots, F_{n_k}$, com $n_1 < \cdots < n_k$. Então, $\bigcap_{j=1}^{k} F_{n_k} = F_{n_k}$. Desde que K é compacto, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Portanto, existe $x \in K$, tal que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Logo, é possível escolher uma sequência estacionária. De fato:

Temos que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Isso implica que $x \in F_1$, implica na existência de um índice $k_1 \in \mathbb{N}$, tal que $x = x_{k_1}$. A partir disso, temos que $x \in F_j$, $1 \leq j \leq k_1$. Analogamente, temos que $x \in F_2$, o que implica na existência um número natural $k_2 > k_1$, tal que $x = x_{k_2}$. Assim, $x \in F_j$, $k_1 \leq j \leq k_2$. Seguindo este raciocínio, temos que existe um índice n arbitrariamente grande, tal que, $x_n = x$. Logo, temos uma sequência estacionária.

($\Leftarrow$) Seja $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de K, isto é, $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \supset K$. Suponha que K não é compacto, isto é, que não exista subcobertura finita. Portanto, qualquer que sejam os índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, temos $\bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \not\supset K$. O teorema de Hausdorff implica que K possui ε-rede finita para todo $\varepsilon > 0$.

Então, se $\varepsilon = 1$, existem discos fechados $B_1^{(1)}, \ldots, B_{m(1)}^{(1)}$, todos com raio um, tais que $B_1^{(1)} \cup \ldots \cup B_{m(1)}^{(1)} \supset K$. Consequentemente, K é limitado. Logo, K tem diâmetro finito, $d(K)$. Vamos construir indutivamente a sequência dos conjuntos $K = K_0 \supset K_1 \supset \ldots$ e tais que

$$d(K_n) \leq \frac{d(K)}{2^n}$$

e, para todo $n \in \mathbb{N}$, o conjunto K_n não pode ser coberto por número finito de G_α.

De fato, acabamos de provar que $K_0 := K$ obedece estas exigências. Suponha que temos construido $K_0, \ldots, K_{n-1}$. Pelo Teorema de Hausdorff, K_{n-1} tem $2^{-n}d(K)$- rede. Portanto, existem $B_1^{(n-1)}, \ldots, B_{m(n-1)}^{(n-1)}$, tais que para todos eles $d(B_s^{(n-1)}) \leq 2^{-n}d(K)$, e

$$\bigcup_{j=1}^{m(n-1)} B_j \supset K_{n-1}.$$

Existe pelo menos um índice j_0, tal que o conjunto $B_{j_0} \cap K_{n-1}$ não é coberto por um número finitos de G_α. Escolhemos $K_n := B_{j_0} \cap K_{n-1}$. Note que, $d(K_n) \leq d(B_{j_0}) \leq d(K)/2^n$, logo este conjunto satisfaz as exigências determinadas acima.

Desde que K_n são fechados para todo $n \in \mathbb{N}$, $K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots$, e $d(K_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, pelo Teorema de Cantor, existe um único ponto $x \in \bigcap_{k=0}^{n} K_n$. Portanto, obviamente $x \in K$. Por outro lado, $\{G_\alpha\}$ é cobertura de K. Logo, existe índece $\alpha_0 \in A$, tal que $x \in G_{\alpha_0}$. Desde que G_{α_0} é aberto, existe $\delta > 0$, de modo que $x \in B(x, \delta) \subset G_{\alpha_0}$. O fato dos diâmetros de $\{K_n\}$ convergirem para zero implica que para algum número natural n que é suficientemente grande, teremos $K_n \subset B(x, \delta) \subset G_{\alpha_0}$. Esta já é uma contradição pois, pela construção, nenhum dos K_n possui subcobertura finita da cobertura $\{G_\alpha\}$.

•

Corolário 3.3.1. *O conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, K é fechado e limitado.*

3.4 Convergência Uniforme

Nesta seção consideremos a questão de convergência uniforme de funções reais e provaremos o Teorema de Arzela-Ascoli.

Definição 3.4.1. *A função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $t_0 \in [a,b]$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para todo t que satisfaz $|t - t_0| < \delta$, temos*

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

Definição 3.4.2. *A função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$ se ela é continua em todo $t_0 \in [a,b]$.*

Definição 3.4.3. *A função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua em $[a,b]$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para quaisquer $t_1, t_2 \in [a,b]$ que satisfazem $|t_1 - t_2| < \delta$, temos*

$$|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon.$$

Exemplo 3.4.1. *A função $\ln x$ é uniformemente contínua no intervalo $[1,\infty)$.*
Demonstração

Devemos mostrar que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para quaisquer x_1 e $x_2 \in [1,\infty)$ que satisfazem $|x_1 - x_2| < \delta$, temos

$$|\ln(x_1) - \ln(x_2)| < \epsilon.$$

De fato. Observer que

$$|\ln x_1 - \ln x_2| < \epsilon \Longrightarrow |\ln \frac{x_1}{x_2}| < \epsilon \Longrightarrow \frac{x_1}{x_2} < e^\epsilon$$

Por outro lado,

$$|x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |\frac{x_1}{x_2} - 1| < \delta \Longrightarrow \frac{x_1}{x_2} - 1 < \delta \Longrightarrow \frac{x_1}{x_2} < \delta + 1.$$

Portanto, basta tomar $\delta = e^\epsilon - 1$. De fato,

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta = e^\epsilon - 1 : |x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |\frac{x_1}{x_2} - 1| < \delta = e^\epsilon - 1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{x_1}{x_2} - 1 < e^{\epsilon} - 1 \Longrightarrow \ln \frac{x_1}{x_2} < \epsilon \Longrightarrow \ln x_1 - \ln x_2 < \epsilon. \\ \frac{x_1}{x_2} - 1 > 1 - e^{\epsilon} \Longrightarrow \frac{x_1}{x_2} > 2 - e^{\epsilon} > -e^{\epsilon} \Longrightarrow \ln \frac{x_1}{x_2} > -\epsilon \Longrightarrow \ln x_1 - \ln x_2 > -\epsilon. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow |\ln x_1 - \ln x_2| < \epsilon$$

como queríamos provar.

Lembramos o seguinte resultado de análise real:

Teorema 3.4.1. *Se f é continua em $K \subset \mathbb{R}$ e K é compacto, então f é uniformemente contínua em K.*

Seguem alguns exemplos de funções que são continuas mas não uniformemente:

Exemplo 1): $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^2$. Seja $\varepsilon > 0$ fixo. Suponha que exista $\delta(\varepsilon) > 0$, de modo que, a desigualdade $|t_1^2 - t_2^2| < \varepsilon$ vale sempre quando $|t_1 - t_2| < \delta$. Desde que

$$|t_1^2 - t_2^2| = |t_1 - t_2||t_1 + t_2| < \varepsilon,$$

se, em particular, se $|t_1 - t_2| = \delta(\varepsilon)/2$, a última desigualdade implica em

$$\frac{2\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} > |t_1 + t_2|.$$

Mas esta desigualdade não é satisfeita para todos $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, pois o seu lado direito pode ser feito infinitamente grande.

Exemplo 2): $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \sin 1/t$. Seja $\varepsilon = 1$. Se f fosse uniformemente continua deveria existir $\delta > 0$, de modo que, para quaisquer $t_1, t_2 \in (0, 1]$, com $|t_1 - t_2| < \delta$, teríamos

$$|\sin \frac{1}{t_1} - \sin \frac{1}{t_1}| < 1.$$

Mas, desde que $\sin 1/t$ oscila muito rapidamente ao redor da origem, sempre podemos escolher t_1 e t_2 muito próximos ao ponto zero que a última desigualdade falhe. Mais precisamente, se $t_1 = 1/((m-1/2)\pi)$, $t_2 = 1/((m+1/2)\pi)$, podemos escolher m tão grande que $|t_1 - t_2| < \delta$. Apesar disso, obviamente $|\sin(1/t_1) - \sin(1/t_2)| = 2$.

Definição 3.4.4. *Dizemos que a sequência $\{f_n\}$ de funções $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $n > n_0$, temos*

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \quad \textit{para todo } t \in [a, b].$$

Neste caso escreveremos $f_n \rightrightarrows f$ em $[a, b]$.

Definição 3.4.5. *Dizemos que a sequência $\{f_n\}$ de funções, definidas em $[a,b]$, é uniformemente convergente em $[a,b]$, se existe $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, tal que $f_n \rightrightarrows f$ em $[a,b]$.*

Lembremos mais um teorema importante da análise real:

Teorema 3.4.2. *Se a sequência $\{f_n\}$ de funções, definidas em $[a,b]$, é uniformemente convergente em $[a,b]$ e $f_n \in C[a,b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então a sua função-limite f é também contínua em $[a,b]$.*

As seguintes funções fornecem um exemplo de sequência que convergente em $[0,1]$, mas não uniformemente:

$$f_n(t) = \begin{cases} 2nt & \text{se } 0 \leq t \leq 1/(2n), \\ 2 - 2nt & \text{se } 1/(2n) \leq t \leq 1/n, \\ 0 & \text{se } 1/n \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Lembremos que:

Teorema 3.4.3. *O espaço $C[a,b]$ com a distância uniforme, é completo.*

Demonstração

Seja (f_m) um sequência fundamental em $C[a,b]$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m,\ n > N$, temos

$$\rho(f_m, f_n) = \sup_{t \in J}\{|f_m(t) - f_n(t)|\} < \epsilon \tag{3.4.8}$$

onde $J = [a,b]$. Assim, para cada $t = t_0 \in J$ fixo,

$$|f_m(t_0) - f_n(t_0)| < \epsilon$$

com $m,\ n > N$.

Isto mostra que $(f_1(t_0), f_2(t_0), \ldots)$ é uma sequência fundamental de números reais. Desde que $\mathbb{R}$ é completo, esta sequência converge, ou seja, $f_m(t_0) \to f(t_0)$, com $m \to \infty$. Desta forma, podemos associar a cada $t \in J$, um único número real $f(t)$. Isto define uma função $f : J \to \mathbb{R}$, tal que $f_m \to f$.

De (3.4.8), fazendo $n \to \infty$, temos

$$\sup_{t \in J}\{|f_m(t) - f(t)|\} < \epsilon \qquad (m > N).$$

Assim, para todo $t \in J$,

$$|f_m(t) - f(t)| < \epsilon \qquad (m > N).$$

Isto mostra que $(f_m(t))$ converge uniformemente para $f(t)$ em J. Desde que $f_m \in C[a,b]$, para todo $m \in \mathbb{N}$, e a convergencia é uniforme, pelo Teorema 3.4.2, a função limite f é contínua em J. Assim, $f \in C[a,b]$.

Logo, $C[a,b]$ é completo. •

Definição 3.4.6. *O subespaço $F \subset C[a,b]$ é chamado uniformemente limitado se existe $M > 0$, tal que $|f(t)| < M$ para todo $t \in [a,b]$ e para toda função $f \in F$.*

Definição 3.4.7. *O subespaço $F \subset C[a,b]$ é equicontínuo se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para quaisquer $t_1, t_2 \in [a,b]$ que satisfazem $|t_1 - t_2| < \delta$, temos*

$$|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon, \quad \textit{para toda} \quad f \in F.$$

Exemplo: Sejam $f_n(x) = x^n$, consideradas em $[0,1]$ e $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Se $\varepsilon = 1/2$ e $|t_1 - t_2| = \delta$, em particular, se $t_1 = 1 - \delta$ e $t_2 = 1$, então

$$\begin{aligned} |f_n(t_1) - f_n(t_2)| &= |t_1^n - t_2^n| \\ &= \delta \left| t_1^{n-1} + t_1^{n-2} t_2 + \cdots + t_2^{n-1} \right| \\ &= \delta \left(1 + (1-\delta) + \cdots + (1-\delta)^{n-1} \right) \\ &= 1 - (1-\delta)^n \\ &> 1/2 \end{aligned}$$

para todo n que é suficientemente grande, independentemente da escolha de δ. Portanto, F não é equicontínuo.

Teorema 3.4.4. *Seja $F \subset C[a,b]$. Então, de toda sequência $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funções de F pode ser escolhida uma subsequência uniformemente convergente se, e somente se, F é uniformemente limitada e equicontínua.*

Demonstração:

$(\Rightarrow)$ De $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ podemos escolher uma subsequência fundamental com respeito à distância uniforme

$$\rho(f,g) = \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|.$$

Então, o Teorema de Hausdorff implica que, para todo $\varepsilon > 0$, a família F possui ε-rede finita $x_1, \ldots, x_n$ de funções, com respeito à ρ. Pela própria definição de ε-rede, segue que, para toda $f \in F$, existe x_j de modo que $\rho(f, x_j) < \varepsilon/3$, isto é,

$$|f(t) - x_j(t)| < \varepsilon/3 \quad \text{para todo} \quad t \in [a,b]. \tag{3.4.9}$$

Por outro lado, para todo i, $1 \leq i \leq n$, a função x_i é uniformemente contínua. Logo, existe $\delta_i > 0$, que para quaisquer $t_1, t_2 \in [a, b]$ com $|t_1 - t_2| < \delta_i$, temos

$$|x_i(t_1) - x_i(t_2)| < \varepsilon/3.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_i \ : \ 1 \leq i \leq n\}$. Assim, se $t_1, t_2 \in [a, b]$ e $|t_1 - t_2| < \delta$, temos

$$|x_i(t_1) - x_i(t_2)| < \varepsilon/3, \quad \text{para} \quad i = 1, 2 \ldots, n. \tag{3.4.10}$$

Desde que $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ são um número finito de funções contínuas em $[a, b]$, o Teorema de Weierstrass garante a exsitência de uma constante $M > 0$, tal que

$$|x_i(t)| < M, \quad \text{para todo} \quad t \in [a, b] \quad e\, para\, i = 1, 2 \ldots, n.$$

Então, para toda $f \in F$, por (3.4.9) temos

$$|f(t)| \leq |f(t) - x_j(t)| + |x_j(t)| \leq \varepsilon/3 + M.$$

Consequentemente, F é uniformemente limitada.

Por outro lado, (3.4.9) e (3.4.10) implicam que, se $t_1, t_2 \in [a, b]$ e $|t_1 - t_2| < \delta$, então

$$\begin{aligned} |f(t_1) - f(t_2)| &\leq |f(t_1) - x_j(t_1)| + |x_j(t_1) - x_j(t_2)| + |x_j(t_2) - f(t_2)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Então, F é equicontínua.

($\Leftarrow$) Primeiramente, observe que existe uma sequência $\{t_k\}_{k=0}^{N}$ de pontos de $[a, b]$, que é um conjunto denso em $[a, b]$. Isto significa que, para todo $\alpha > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, que para todo $t \in [a, b]$ existe n, $1 \leq n \leq N$, de modo que $|t - t_n| < \alpha$. De fato, vamos considerar os pontos definidos da seguinte forma. Sejam $t_0 = a$ e $t_1 = b$ os pontos extremos de $[a, b]$. O ponto $t_2 = (a+b)/2$ é ponto médio de $[a, b]$. Os pontos t_3 e t_4 são os pontos médios de $[t_0, t_2]$ e de $[t_1, t_2]$, respectivamente. Continuando assim, depois de l passos obtemos 2^l pontos que dividem $[a, b]$ em intervalos iguais, cada um com comprimento $(b-a)/2^l$. Então, se l é o menor número natural com $\alpha > (b - a)/2^l$, escolhemos $N = 2^l$.

Consideremos a sequência $\{f_n(t_k)\}_{n=1}^{\infty}$. Desde que F é uniformemente limitado, $\{f_n(t_k)\}_{n=1}^{\infty}$ é limitada. Portanto, existe uma subsequência convergente $\{f_{n_j}(t_k)\}$.

Para $k = 1$ consideremos $A_1 = \{f_{11}, f_{21}, f_{31}, \ldots\}$ que é convergente em t_1.

Para $k = 2$ escolhemos $A_1 \supset A_2 = \{f_{12}, f_{22}, f_{32}, \ldots\}$ que é convergente em t_1 e em t_2.

Para $k = 3$ escolhemos $A_1 \supset A_2 \supset A_3 = \{f_{13}, f_{23}, f_{33}, \ldots\}$ que é convergente em t_1, t_2 e t_3 simultaneamente.

Deste forma, para cada $k \in \mathbb{N}$ escolhemos $A_{k-1} \supset A_k = \{f_{1k}, f_{2k}, \ldots, f_{kk}, \ldots\}$ que é convergente em $t_1, t_2, \ldots, t_k$ simultaneamente.

Vamos escolher $g_i = f_{ii}$. Esta é uma subsequência convergente para todo $t_k,\ k = 1, 2, \ldots$. De fato, seja $k \in \mathbb{N}$. Então, os termos da sequência $\{g_i(t_k)\}_{i=1}^{\infty}$, com excessão de $g_1(t_k), \ldots, g_{k-1}(t_k)$ são de A_k. Assim, $\{g_i(t)\} \in C[a, b]$ que é um espaço completo. Mostremos que $\{g_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ é fundamental com respeito a distância uniforme em $[a, b]$, o que implicará que esta sequência é convergente em $C[a, b]$. Para este propósito, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Desde que F é equicontínua, existe $\delta > 0$, tal que para quaisquer $t', t'' \in [a, b]$ com $|t' - t''| < \delta$, temos

$$|g_i(t') - g_i(t'')| < \varepsilon/3, \quad \text{para todo} \quad i \in \mathbb{N}. \tag{3.4.11}$$

Por construção temos que, para o mesmo δ existe $N_2 \in \mathbb{N}$, que para todo $t \in [a, b]$ existe $n \leq N_2$, de modo que $|t - t_n| < \delta$. Então, de (3.4.11) segue que

$$|g_i(t_n) - g_i(t)| < \varepsilon/3, \quad \text{para todo} \quad i \in \mathbb{N}. \tag{3.4.12}$$

Desde que $\{g_i(t_n)\}_{i=1}^{\infty}$ é convergente, existe $N_3 \in \mathbb{N}$, que para todo $i > N_3$ e para todo $p \in \mathbb{N}$ temos

$$|g_i(t_n) - g_{i+p}(t)| < \varepsilon/3. \tag{3.4.13}$$

Resumindo, para um $\varepsilon > 0$ arbitrário, escolhemos consecutivamente $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e finalmente $N_3 \in \mathbb{N}$, de modo que, para todo $i > N_3$ e para todo $p \in \mathbb{N}$, por (3.4.12) e (3.4.13), temos

$$\begin{aligned} |g_i(t) - g_{i+p}(t)| &\leq |g_i(t) - g_i(t_n)| + |g_i(t_n) - g_{i+p}(t_n)| + |g_{i+p}(t_n) - g_{i+p}(t)| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo $\{g_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ é fundamental em $C[a, b]$, e portanto, pelo fato de $C[a, b]$ ser completo, a sequência $\{g_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ é uniformemente convergente em $[a, b]$.

3.5 Exercícios

1. Seja a, b números reais com $a < b$ e $I[a, b]$ o conjunto das funções Riemann integráveis de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$, e $\rho : I[a, b] \times I[a, b] \to [0, \infty)$ dada por

$$\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt.$$

Mostre que ρ não é uma distância em $I[a,b]$ mas é uma distância em $C[a,b] \subset I[a,b]$ e que $C[a,b]$ não é completo com esta distância.

2. Mostre que (X, ρ) é completo se, e somente se, toda sequência $\{B_k\}$ de bolas fechadas, com $B_{n+1} \subset B_n$ e $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, ($r_n$ = raio de B_n), a intersecção $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ consiste exatamente de um ponto.

3. Seja X um espaço métrico, e seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, dado qualquer número real r, os conjuntos

$$\{x \in X : f(x) > r\}, \qquad \{x \in X : f(x) < r\}$$

são conjuntos abertos de X, e os conjuntos

$$\{x \in X : f(x) \geq r\}, \qquad \{x \in X : f(x) \leq r\}, \qquad \{x \in X : f(x) = r\}$$

são conjuntos fechados de X.

3. Seja (X, ρ) um espaço métrico completo e $A : X \to X$ um operador. Assuma que, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, T^{n_0} é uma contração e mostre que T tem um único ponto fixo.

4. Demonstrar que $f(x) = x^2$ é uniformemente contínua em $[0,1]$, mas não é em $(0,\infty)$.

5. Mostre que toda aplicação lipschitziana $f : M \to N$ é uniformemente contínua.

6. Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado. Mostre que toda função monótona sobrejetiva $f : X \to J$, definida num subconjunto qualquer $X \subset \mathbb{R}$, é uniformemente contínua. Caso tirarmos a hipótese de J ser limitado, o que podemos concluir?

7. Mostre que uma aplicação $f : M \to N_1 \times \ldots \times N_n$, tomando valores num produto cartesiano de n espaços métricos, é uniformemente contínua se, e somente se, cada uma de suas coordenadas $f_i = p_i \circ f : M \to N_i$ for uniformemente contínua.

8. Sejam $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$, onde K é compacto e U é aberto. Prove que existe

$\epsilon > 0$ tal que $x \in K,\ y \in U$ e $|x - y| < \epsilon \Rightarrow [x, y] \subset U$.

9. Sejam $K \subset V \subset M$ onde K é compacto e V é aberto em M. Prove que existe $r > 0$ tal que $\bigcup_{x \in K} B(x, r) \subset V$.

10. Sejam $K,\ L$ espaços métrico compactos e $f : K \times L \to \mathbb{R}$ contínua. Para cada $y \in L$, ponha $\phi(y) = \sup_{x \in K} f(s, y)$. Prove que $\phi : L \to \mathbb{R}$, assim definida, é contínua.

Capítulo 4

Espaços Normados

4.1 Normas e espaços normados

Definição 4.1.1. *Seja X um espaço linear sob o corpo $\mathcal{F}$. A função $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ é chamada norma em X se:*

1)$\|x\| \geq 0 \ \forall x \in X$ *e* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2)$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \quad \forall \lambda \in \mathcal{F}$ *e* $\forall x \in X$;
3)$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$.

Se $\|\cdot\|$ é uma norma em X, a dupla $(X, \|\cdot\|)$ é chamada espaço normado.

Lema 4.1.1. *Todo espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço métrico (X, ρ) se a distância é definida por $\rho(x, y) = \|x - y\|$.*

Demonstração.
Para quaisquer x, y e z em X temos:

1. A afirmação $\rho(x, y) \geq 0$ é obtida pela definição de norma. Agora, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow ||x - y|| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $\rho(x, y) = ||x - y|| = ||(-1)(y - x)|| = |-1|||y - x|| = ||y - x|| = \rho(y, x)$.
3. $\rho(x, y) = ||x - y|| = ||x - z + z - y|| \leq ||x - z|| + ||z - y|| = \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

   Portanto $\rho(x, y) = ||x - y||$ é uma métrica e assim (X, ρ) é um espaço métrico.

Exemplos:

1) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, onde $\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$ quando $1 \leq p < \infty$ e $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq p \leq n} |x_k|$;
2) $(C[a,b], \|\cdot\|_{L_\infty})$, onde $\|f\|_{L_\infty} = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$;
3) $L_p[a,b] = (L_p[a,b], \|\cdot\|_{L_\infty})$, $1 \leq p < \infty$, onde $L_p[a,b]$ denota o espaço das funções$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que satisfazem $\int_a^b |f(t)|^p dt < \infty$, e $\|f\| = (\int_a^b |f(t)|^p dt)^{1/p}$. Provar que $\rho(f,g)$ é distância.
4) Lembremos que (X, ρ), onde

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

é um espaço métrico. Entretanto, se o espaço possui pelo menos um elemento distinto do neutro, não existe norma, tal que $\rho(x,y) = \|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in X$. De fato, se tal norma existisse e se $x \neq 0$, teriamos $\|x\| = 1$ e $\|2x\| = 1$, o que contradiz a propriedade 2) da norma.

Para provarmos a desigualdade do triângulo para a norma $\|\cdot\|_p$, precisaremos de alguns resultados técnicos.

Lema 4.1.2. *Sejam $p, q > 1$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, a desigualdade*

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

é verdadeira para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.

Demonstração:
Basta considerar as áreas cercadas, no segundo quadrante, pelo gráfico da função $y = x^{p-1}$, e pelas retas $x = |a|$ e $y = |b|$.

Observe que a área do quadrado de lados $|a|$ e $|b|$ é menor que a área das regiões R1 e R2 limitadas pelo gráfico da função e as retas $|a|$ e $|b|$ respectivamente.

Calculamos então as áreas das regiões R1 e R2 que serão denominadas por A_{R1} e A_{R2} respectivamnete.

$$A_{R1} = \int_0^{|a|} x^{p-1} dx = \frac{|a|^p}{p}$$

$$A_{R2} = \int_0^{|b|} y^{\frac{1}{p-1}} dy = \left(\frac{p-1}{p}\right) |b|^{\frac{p}{p-1}}$$

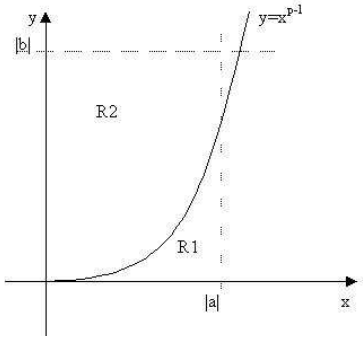

Figura 1 Gráfico $y = x^{p-1}$

Observe que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \Rightarrow \dfrac{p}{q} + 1 = p \Rightarrow \dfrac{p}{q} = p - 1 \Rightarrow q = \dfrac{p}{p-1}$.

Com isso, $A_{R2} = \dfrac{|b|^q}{q}$.

Observe que a igualdade é atingida se, e somente se, $|b| = |a|^{p-1}$. •

Lema 4.1.3. (Desigualdade de Hölder). *Sejam $p, q > 1$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, a desigualdade*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{1/q}$$

é verdadeira para quaisquer $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Seja $i,\ 1 \leq i \leq n$. Aplicando o lema anterior para

$$a = \frac{|x_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}} \quad e \quad b = \frac{|y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{1/q}},$$

obtemos

$$\frac{|x_i y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{1/q}} \leq \frac{|x_i|^p}{p \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)} + \frac{|y_i|^q}{q \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)}.$$

Somando estas desigualdades, para $i = 1, \ldots, n$, obtemos a desigualdade

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

que é equivalente à desigualdade de Hölder. •

Lema 4.1.4. (Desigualdade do triângulo para $\|\cdot\|_p$ ou Inequação de Minkowski). *Se* $p \geq 1$ *e* $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$*, então*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Demonstração.
Para "$p = \infty$" temos

$$||x + y||_\infty = \sup_i |x_i + y_i|.$$

Mas, sabemos que para todo $i = 1, 2, \ldots$ temos $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$ e assim, $\sup\limits_i |x_i + y_i| \leq \sup\limits_i(|x_i| + |y_i|) \leq \sup\limits_i |x_i| + \sup\limits_i |y_i|$.
Logo $||x_i + y_i||_\infty \leq ||x_i||_\infty + ||y_i||_\infty$.
Para p=1 a inequação se reduz a desigualdade triangular :

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \; para \; i = 1, 2, \ldots$$

Somando as i inequações membro a membro obtemos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|$$

Considerando agora $1 < p < \infty$, para simplificar a demonstração escreveremos $z_i = x_i + y_i$. Assim,

$$|z_i|^p = |x_i + y_i||z_i|^{p-1} \leq (|x_i| + |y_i|)|z_i|^{p-1}. \; para \; i = 1, 2, \ldots$$

Somando as i inequações obtemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i||z_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i||z_i|^{p-1}$$

Observe que, pela inequação de Höder

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i||z_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} (|z_i|^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Agora, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \Rightarrow \dfrac{p+q}{pq} = 1 \Rightarrow pq = p + q \Rightarrow (p-1)q = p$.
Ou seja, podemos escrever

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i||z_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

De modo análogo obtemos,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |y_i||z_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Somando as duas ultimas inequações obtemos,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |z_i| \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Observe agora que, se $||x + y||_p = 0$ a desigualdade triangular é satisfeita pela definição de norma. Assim, supondo que $||x + y||_p \neq 0$ podemos dividir a inequação anterior por $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}$, obtendo assim a inequação desejada. $\bullet$

Definição 4.1.2. *Sejam* $(X, \|\cdot\|)$ *um espaço normado e* $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$. *Dizemos que a sequência* $\{x_n\}$ *converge para* $x \in X$, *se* $\|x_n - x\| \to 0$ *quando* $n \to \infty$.

Lema 4.1.5. *Toda norma é uma função contínua.*

Demonstração:
Pela desigualdade do triangulo, obtemos $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, o que implica em

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|. \tag{4.1.1}$$

De modo análogo, obtemos, $\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|x - y\| + \|x\|$ que implica em

$$-(\|x\| - \|y\|) \leq \|x - y\|. \tag{4.1.2}$$

Então, de (4.1.1) e (4.1.2), obtemos

$$|\, \|x\| - \|y\| \,| \leq \|x - y\|.$$

Portanto, a norma é contínua em x_0 pois, se $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, mais precisamente $\delta = \varepsilon$, de modo que, se $\|x - x_0\| < \delta$, então $|\, \|x\| - \|x_0\| \,| < \varepsilon$. Resumindo, provamos que toda norma é uma função de Lipschitz com constante um. $\bullet$

Definição 4.1.3. *Seja* $(X, \|\cdot\|)$ *um espaço normado. O conjunto* $E \subset X$ *é limitado, se existe* $M > 0$, *tal que* $\|x\| < M$ *para todo* $x \in E$.

Lema 4.1.6. *Se a sequência* $\{x_n\}$ *é convergente, então ela é limitada.*

Demonstração:
Seja x o limite de $\{x_n\}$. Então, se $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $n > N$, temos $\|x_n - x\| < \varepsilon$. Portanto, se $\|x\| = M_0$, concluimos que

$$\|x_n\| = \|x_n - x + x\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| \leq \varepsilon + M_0 \quad \text{para todo } n > N.$$

Então, se $\|x_k\| = M_k$, $k = 1, \ldots, N$, definimos $M = \max\{\varepsilon + M_0, M_1, \ldots, M_N\}$. Logo, $\|x_n\| \leq M$ para todo termo da sequência. •

Definição 4.1.4. *A bola aberta com centro x_0 e raio r é definida por*

$$B(x_0, r) = \{x \ : \ \|x - x_0\| < r\}.$$

Lema 4.1.7. (i) *Se $x_n \to x$ e $y_n \to y$, então $(x_n + y_n) \to (x + y)$.*
(ii) *Se $\lambda_n \to \lambda$ e $x_n \to x$, então $(\lambda_n x_n) \to (\lambda x)$.*

Demonstração.
(i) $x_n \to x \Rightarrow$ Dado $\epsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_1$ temos $\|x_n - x\| < \dfrac{\epsilon}{2}$.
$y_n \to y \Rightarrow$ Dado $\epsilon > 0$, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_2$ temos $\|y_n - y\| < \dfrac{\epsilon}{2}$.
Assim, dado $\epsilon > 0$ tomando $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ temos $\|(x_n + y_n) - (x + y)\| =$
$= \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \|(x_n + y_n)\| - \|(x + y)\| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$
Logo $(x_n + y_n) \to (x + y)$.
(ii) Se tivermos λ ou x igual a zero, obtemos facilmente a afirmação $\lambda_n x_n \to \lambda x$.
Supondo então que λ e x são não nulos, temos.
$x_n \to x \Rightarrow$ Dado $\epsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_1$ temos $\|x_n - x\| < \dfrac{\epsilon}{2\|\lambda_n\|}$.
$\lambda_n \to \lambda \Rightarrow$ Dado $\epsilon > 0$, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_2$ temos $\|\lambda_n - \lambda\| < \dfrac{\epsilon}{2\|x\|}$.
Assim, dado $\epsilon > 0$ tomando $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ temos $\|\lambda_n x_n - \lambda x\| =$
$= \|\lambda_n x_n + \lambda_n x - \lambda_n x - \lambda x\| = \|\lambda_n(x_n - x) + x(\lambda_n - \lambda)\| \leq \|\lambda_n\|\|x_n - x\| +$
$displaystyle\|x\|\|\lambda_n - \lambda\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$
Logo $\lambda_n x_n \to \lambda x$. •
O valor $\|\lambda\|$ existe pelo fato de $\{\lambda_n\}$ ser convergente. Pois como a sequência é convergente então a mesma é limitada.

Definição 4.1.5. *Todo espaço normado que é completo, é chamado espaço de Banach. Precisamente, $(X, \|\cdot\|)$ é espaço de Banach se toda sequência fundamental $\{x_n\} \subset X$ converge para algum $x \in X$.*

Exemplos:
1) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ é espaço de Banach, para todo $p\ onde 1 \leq p \leq \infty$.

2) $(C[a,b], \|\cdot\|_{L_\infty})$ é espaço de Banach.
3) $(\pi, \|\cdot\|_{L_\infty[a,b]})$ não é espaço de Banach. Aqui $\pi = \cup_{n=0}^{\infty}\pi_n$, com

$$\pi_n = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ : \ a_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Isto significa que π é o espaço de todos os polinômios algébricos com coeficientes reais. Pelo Teorema de Stone-Weierstrass, toda função contínua em $[a,b]$, pode ser aproximada arbitrariamente bem, na forma uniforme por elementos de π. Portanto, se, por exemplo $f(x) = |x-(a+b)/2|$, existe sequência de polinômios algébricos $\{p_n\}$, tal que $p_n \rightrightarrows f$ em $[a,b]$, mas $f \notin \pi$ (ver próxima seção).
4) $(C[-1,1], \|\cdot\|_{L_1})$ não é espaço de Banach. De fato, se considerarmos a sequência de funções contínuas

$$f_n = \begin{cases} -1, & \text{se } x \in [-1,-1/n], \\ nx, & \text{se } x \in [-1/n, 1/n], \\ 1, & \text{se } x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

Se $m > n$, então $\|f_n - f_m\|_{L_1} \leq 2/n$. Logo, $\{f_n\}$ é uma sequência que é fundamental em $(C[-1,1], \|\cdot\|_{L_1})$. Entretanto, o limite desta sequência é uma função que é discontínua em $[-1,1]$.

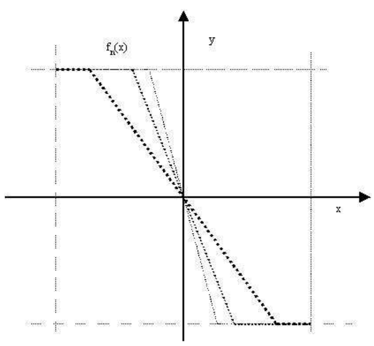

Figura 2 Representação das funções f_n

Definição 4.1.6. *Consideremos agora, no espaço* $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$*, o conjunto*

$$B_p(0,1) = \{x \ : \ x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_p < 1\}.$$

Ele é chamado bola unitária, associada com a norma $\|\cdot\|_p$*. Obviamente,* $B_p(0,1)$ *é um conjunto convexo em* $\mathbb{R}^2$ *e simétrico com respeito a origem.*

Definição 4.1.7. *Seja E um conjunto e λ uma constante. Definimos por λE, o conjunto de todos os pontos λx onde $x \in E$, ou seja,*

$$\lambda E = \{\lambda x \ : \ x \in E\}.$$

Problema 4.1.1. *Seja $B \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto que é convexo e simétrico com respeito a origem. Para todo $x \in \mathbb{R}^2$, definimos*

$$\|x\|_B = inf\{\lambda \ : \ \lambda B \ni x\}.$$

Podemos afirmar que $\|\cdot\|_B$ é uma norma em $\mathbb{R}^2$?

Definição 4.1.8. *Sejam X um espaço e $\|\cdot\|$ e $|\cdot|$ duas normas em X. Elas são chamadas equivalentes se existem constantes $a, b > 0$, de modo que, para todo $x \in X$, temos*

$$a|x| \leq \|x\| \leq b|x|. \tag{4.1.3}$$

Se $\|\cdot\|$ e $|\cdot|$ são duas normas equivalentes em X, as constantes

$$A = \inf_{x \in X} \frac{\|\cdot\|}{|\cdot|} \quad e \quad B = \sup_{x \in X} \frac{\|\cdot\|}{|\cdot|}$$

são chamadas coeficientes de equivalência de $\|\cdot\|$ e $|\cdot|$.

Problema 4.1.2. *Provar que, se $\|\cdot\|$ e $|\cdot|$ são duas normas equivalentes em X, os coeficientes de equivalência de $\|\cdot\|$ e $|\cdot|$ são bem definidos. Mostrar, além disso, que $A = \sup\{a \ : \ a$ satisfaz (4.1.3)$\}$ e $B = \inf\{b \ : \ b$ satisfaz (4.1.3)$\}$.*

Agora introduziremos os espaços l_p :
se $1 \leq p < \infty$, então

$$l_p := \{x = (x_1, x_2, \ldots) \ : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\},$$

isto é, os elementos de l_p são sequências, em geral infinitas, para as quais a serie $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ é convergente, ou de modo análogo, são as sequências tais que as séries $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^p$ são absolutamente convergente. A norma em l_p é definida por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Analogamente, para "$p = \infty$", temos

$$l_\infty := \{x = (x_1, x_2, \ldots) \ : \sup_{1 \leq i \leq \infty} |x_i| < \infty\},$$

com a norma $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq \infty} |x_i|$.

Problema 4.1.3. *l_p são espaços de Banach? Justifique a resposta.*

Mostremos agora que l_p é completo e daí concluímos que é de Banach.

Para $p = \infty$, seja $\{x_m\}$ uma sequência fundamental qualquer em l_∞ , onde $x_m = \{a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \ldots\}$.

Considerando a métrica em l_∞ dada por

$$d(x, y) = \sup_j |a_j - b_j|,$$

onde $x = \{a_j\}$ e $y = \{b_j\}$.

Como $\{x_m\}$ fundamental, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um natural N tal que para todo m, n>N,

$$d(x_m, x_n) = \sup_j |a_j^{(m)} - a_j^{(n)}| < \epsilon.$$

Com isso, podemos afirmar que para qualquer j fixo e m, n $> N$

$$|a_j^{(m)} - a_j^{(n)}| < \epsilon.$$

Assim, para todo j fixo a sequência $\{a_j^{(1)}, a_j^{(2)}, \ldots\}$ é fundamental. Observe que esta é uma sequência de número reais, assim. Sabemos que toda sequência fundamental de números reais é convergente, ou seja, $\{a_j^{(1)}, a_j^{(2)}, \ldots\} \to a_j$ quando $m \to \infty$.

Usando este fato para todos os j, obtemos uma sequência $x = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Mostremos que, $x \in l_\infty$ e $x_m \to x$.

Como anteriormente, para todo j fixo, fazendo $n \to \infty$ e m $>$ N temos,

$$|a_j^{(m)} - a_j^{(n)}| < \epsilon \Rightarrow |a_j^{(m)} - a_j| \leq \epsilon.$$

Como $x_m = \{a_j^{(m)}\} \in l_\infty$, existe um número real k_m tal que $|a_j^{(m)}| \leq k_m$ para todo j (pois $\{a_j^{(m)}\}$ é convergente e portanto limitada).

Assim, obtemos a seguinte desigualdade para m $>$ N,

$$|a_j| \leq |a_j - a_j^{(m)} + a_j^{(m)}| \leq |a_j - a_j^{(m)}| + |a_j^{(m)}| \leq \epsilon + k_m.$$

Observe que o lado direito desta inequação não depende de j, ou seja, $x = \{a_j\}$ é uma sequência, de números reais, limitada. Com isso, temos que x é convergente, então $x \in l_\infty$. E como já demonstrado anteriormente,

$$d(x_m, x) = \sup_j |a_j^{(m)} - a_j| \leq \epsilon,$$

o que nos garante que $x_m \to x$. Logo l_∞ é completo.

Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\{x_n\}$ uma sequência fundamental em l_p, onde $x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots)$. Para todo $\epsilon > 0$ existe um m, $n > N$ tal que

$$d(m_m, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(m)} - x_i^{(n)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$$

Desse modo temos que $|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| < \epsilon$ para $m, n > N$

Para um i fixo, temos que $(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots)$ é uma sequência fundamental.

Cada elemento $x_i^{(m)}$ desta nova sequência, converge para um valor x_{i_0} quando m vai para o infinito. Usando este fato, obtemos um ponto $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ e mostraremos que $x \in l_p$ e $x_m \to x$

Sabemos que para $m, n > N$ temos $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} |x_i^{(m)} - x_i^{(n)}|^p < \epsilon^p$ para $k = 1, 2, \ldots$

Fazendo $n \to \infty$ obtemos para $m > N$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} |x_i^{(m)} - x_i|^p \leq \epsilon^p$ para $k = 1, 2, \ldots$

Fazendo agora $k \to \infty$ temos para $m > N$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(m)} - x_i|^p \leq \epsilon^p$.

Com isso mostramos que $x_m - x = (x_i^{(m)} - x_i) \in l_p$. Como $x_m \in l_p$ temos que $x = x_m + (x - x_m)$.

Como $\{x_m\}$ é uma sequência fundamental arbitrária em l_p, temos que l_p é completo para $1 \leq p < \infty$.

4.2 Operadores Lineares Limitados

Sejam X e Y dois espaços lineares. Nesta seção estudaremos algumas propriedades de operaderes $T : X \to Y$. Isto significa que para todo $x \in X$, o operador T coloca em correspondência com um valor $y \in Y$, isto é, $y = Tx$.

Definição 4.2.1. *Sejam X e Y espaços lineares sob o corpo $\mathcal{F}$. O operador $T : X \to Y$ é linear se:*

1) $T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2 \quad \forall x_1, x_2 \in X$;
2) $T(\lambda x) = \lambda\, Tx \qquad \forall \lambda \in \mathcal{F}$ *e* $\forall x \in X$.

Exemplos:

1) Se $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^n$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base em $\mathbb{R}^n$, definimos $Tx = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots \lambda_n x_n$. Se $Tx_k = a_{1k}e_1 + a_{2k}e_2 + \cdots a_{nk}e_n$, então

$$\begin{aligned} Tx &= \lambda_1\ (a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots a_{n1}e_n) \\ &\quad + \lambda_2\ (a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots a_{n2}e_n) \\ &\quad \dots\dots\dots\dots\dots \\ &\quad + \lambda_n\ (a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots a_{nn}e_n) \\ \\ &= (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \cdots + \lambda_n a_{1n})\ e_1 \\ &\quad +(\lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_n a_{2n})\ e_2 \\ &\quad \dots\dots\dots\dots\dots \\ &\quad +(\lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \cdots + \lambda_n a_{nn})\ e_n. \end{aligned}$$

Portanto, se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

e $x = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$ a representação de x na base $\{e_1, \dots, e_n\}$, então a representação de Tx na mesma base é simplesmente Ax.
2) O operador $T : C[a,b] \to C[a,b]$, é definido da seguinte forma. Seja $K(x,y) \in C([a,b] \times [a,b])$. Então, se $x(t)$ é qualquer função continua em $[a,b]$, o "valor" Tx do operador T para a função x é a seguinte função contínua:

$$Tx(t) = \int_a^b K(u,t)x(u)du.$$

Definição 4.2.2. *Quando o espaço Y é um corpo, o operador $T : X \to Y$ é chamado funcional.*

Por exemplo, se $Y = \mathbb{R}$ ou $Y = \mathbb{C}$, o operador é funcional.

Definição 4.2.3. *Sejam X e Y espaços normados. O operador $T : X \to Y$ é chamado contínuo em $x_0 \in X$ se, para toda sequência $\{x_n\}$ que converge para x_0, temos que $Tx_n \to Tx_0$.*

Definição 4.2.4. *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços normados. O operador $T : X \to Y$ é chamado limitado se existe uma constante $M > 0$, tal que*

$$\|Tx\|_Y \leq M\ \|x\|_X \quad \textit{para todo} \quad x \in X.$$

Teorema 4.2.1. *Sejam X e Y espaços lineares normados e $T : X \to Y$ um operador linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
1) *T é contínuo em X.*
2) *T é contínuo em $0 \in X$.*
3) *T é limitado.*

Demonstração:
Que 1) implica 2) é obvio. Portanto, primeiramente provaremos que
2) $\Rightarrow$ 3).
Vamos supor que T não é limitado. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe x_n, tal que $\|Tx_n\| > n\|x_n\|$. Consideremos a sequência dos pontos

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|}.$$

Obviamente $\tilde{x}_n \to 0$ pois $\|\tilde{x}_n - 0\| = \dfrac{1}{n}$. Os valores de T em $\tilde{x}_n$ são

$$T\tilde{x}_n = T\left(\frac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) = \frac{1}{n\|x_n\|}Tx_n.$$

Logo, pela hipótese que fizemos,

$$\|T\tilde{x}_n\| = \frac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|} > \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1.$$

Portanto, a sequência Tx_n não converge para zero, o que contradiz a hipótese de T ser contínua em zero.

Finalmente provaremos que
3) $\Rightarrow$ 1).
Sabemos que existe constante positiva M, tal que

$$\|Tx\| \leq M\|x\| \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Seja $x \in X$ arbitrário e $\{x_n\}$ uma sequência de pontos de X que converge para x. Em outras palavras, temos que $\|x_n - x\| \to 0$ quando n tende ao infinito. Logo,

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\| \to 0.$$

Então, $Tx_n \to Tx$ quando $n \to \infty$. Portanto, T é contínuo em x. E como x é um ponto qualquer, concluímos que T é contínuo. •

Teorema 4.2.2. *Se $T : X \to Y$ é um operador linear e a dimensão de X é finita, então T é limitado.*

Demonstração:
Sejam $dimX = n$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de X. Seja $\{x_k\}, x_k \in X$, uma sequência que converge para o elemento neutro (0) de X, isto é $x_k \to 0$. Para todo $k \in \mathbb{N}$, o ponto x_k pode ser unicamente representado como $x_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(k)} e_i$. Logo, para todo índice i fixo, $1 \leq i \leq n$, temos que $\lambda_i^{(k)} \to 0$ quando $k \to \infty$. Usando este fato e a desigualdade do triângulo, obtemos

$$\|Tx_k\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i^{(k)}| \|Te_i\| \to 0.$$

Consequentemente, T é contínuo no elemento nulo de X, e pelo teorema anterior, T é limitado. •

Definição 4.2.5. *Sejam X e Y espaços normados. Por $B(X,Y)$ denotaremos o conjunto de todos os operadores lineares e limitados $T : X \to Y$. As operações lineares em $B(X,Y)$ são definidas através de:*
1) $(T + S)x = Tx + Sx$;
2) $(\alpha T)x = \alpha Tx$,
com as quais $B(X,Y)$ torna-se um espaço linear.

O elemento neutro (nulo) do espaço $B(X,Y)$ é o operador $\mathcal{O}$ cujo valor é o elemento nulo de Y, para qualquer $x \in X$, isto é $\mathcal{O}x = 0 \in Y$ para todo $x \in X$.

Um exemplo conhecido é quando $X = Y = \mathbb{R}^n$. Neste caso $B(X,Y) = M_n$, ou seja, o conjunto das matrizes reais $n \times n$.

Em seguida introduziremos norma em $B(X,Y)$. Para este propósito, observemos primeiramente que, se $T \in B(X,Y)$, as quantidades C' e C_0 abaixo são bem definidas:

$$\begin{aligned} C' &= \inf \{C \in \mathbb{R} \ : \ \|Tx\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in X\} \\ &= \inf \left\{ C \in \mathbb{R} \ : \ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq C \quad \forall x \in X \right\}, \end{aligned}$$

Mostremos que o conjunto A, dado da seguinte forma $\{C \in \mathbb{R} \ : \ \|Tx\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in X\}$, é fechado. Pois assim, concluímos que $C' \in A$, ou equivalente, que $\|Tx\| \leq C'\|x\|$.

Primeiramente, observemos que A é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Assim, consideraremos a métrica usual. Agora mostremos que A^c é um conjunto aberto. Temos que

$$A^c = \{C \in \mathbb{R} \ : \ \|Tx\| > C\|x\| \quad \text{para algum} \ \ x \in X\}.$$

Se A^c for um conjunto vazio não há o que demonstrar. Assim, supomos A^c não vazio e seja C um elemento qualquer de A^c, ou seja, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\|Tx_0\| > C\|x_0\|$. Como T é um operador obtemos x_0 não nulo. Assim, $\dfrac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|} - C > 0$.

Considerando a bola aberta B(C,r), onde $r = \dfrac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|} - C$. Mostremos que $B(C,r) \subset A^c$.

Seja $C^1 \in B(C,r) \Rightarrow |C^1 - C| < r \Rightarrow -r < C^1 - C < r$. Considerando apenas a segunda desigualdade obtemos

$$C^1 - C < r \Rightarrow C^1 - C < \frac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|} - C \Rightarrow C^1 < \frac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|} \Rightarrow \frac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|} > C^1.$$

Logo, $C^1 \in A^c$ e assim $B(C,r) \subset A^c$, ou seja A é um conjunto fechado.

$$\begin{aligned} C_0 &= \sup_{x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|. \end{aligned}$$

Obviamente as duas quantidades que definem C' são iguais. Para mostrarmos que o mesmo vale para as que definem C_0, observa que, se $x \in X$ é arbitrário, então $\tilde{x} = x/\|x\|$ satisfaz $\|\tilde{x}\| = 1$ e também

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \frac{\|T(\|x\|\tilde{x})\|}{\|x\|\|\tilde{x}\|} = \|T\tilde{x}\|.$$

Lema 4.2.1. *Para todo o operador $T \in B(X,Y)$, temos $C' = C_0$.*

De fato, pela definição de C_0 temos que C_0 satisfaz $\|Tx\| \leq C_0\|x\|$ e como C' é o limite inferior, temos que $C' \leq C_0$. (1)

Como mostramos anteriormente, $\|Tx\| \leq C'\|x\|$, para todo $x \in \mathbb{R}$, em particular vale para qualquer x não nulo. Mas C_0 é o sup de $\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$ para todo x não nulo, temos pela definição de sup que $C_0 \leq C'$. (2)

Portanto, de (1) e (2) temos $C_0 = C'$.

Definição 4.2.6. *Se $T \in B(X,Y)$, a sua norma é definida como sendo a constante $C' = C_0$, isto é*

$$\|T\| = C' = C_0. \tag{4.2.4}$$

Isto significa que a norma do operador T pode ser definida por qualquer uma das quatro quantidade acima e que todas estas difinições são equivalentes.

Lema 4.2.2. *A expressão* (4.2.4) *de fato define uma norma em* $B(X, Y)$.

Demonstração:
Verificaremos as três propriedades de norma:
1) Obviamente $\|T\| \geq 0$. Também, pela definição da norma de T, obviamente $\|T\| = 0$ se, e somente se $\|Tx\|/\|x\| = 0$ para todo $x \in X$ o que é equivalente ao fato de que $\|Tx\| = 0$ para todo $x \in X$.
2) Esta propriedade segue imediatamente:

$$\|\lambda T\| = \sup_{\|x\|=1} \|(\lambda T)x\| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\lambda| \|T\|.$$

3) Na demosnstração desta propriedade usaremos o fato de que, se as funções reais f e g são definidas e limitadas no conjunto A, então

$$\sup_{x \in A} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x), \tag{4.2.5}$$

cuja demonstração é imediata:

$$\sup_{x \in A} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in A, y \in A} (f(x) + g(y)) = \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{y \in A} g(y).$$

Assim, a seguinte cadeia de igualdadedes e desigualdades implica na desigualdade do triângulo para a norma $\|T\|$:

$$\begin{aligned} \|S + T\| &= \sup_{\|x\|=1} \|(S + T)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|Sx + Tx\| \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} (\|Sx\| + \|Tx\|) \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|Sx\| + \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \\ &= \|S\| + \|T\|. \end{aligned}$$

•

Teorema 4.2.3. *Se* X *é um espaço normado e* Y *é um espaço de Banach, então* $B(X, Y)$ *é também um espaço de Banach.*

Demonstração:
Primeiramente mostremos que, se $\{T_n\}$ é uma sequência de operadores, $T_n : X \to Y$, tais que, para todo $x \in X$, $\|T_n x - Tx\| \to 0$, quando $n \to \infty$, então T é operador linear. Desde que T_n são lineares e convergem, para T, para todo ponto $x \in X$.

Temos

$$
\begin{aligned}
&\|T(\lambda x + \mu y) - (\lambda Tx + \mu Ty)\| \\
&\quad = \|T(\lambda x + \mu y) - T_n(\lambda x + \mu y) + (\lambda T_n x + \mu T_n y) - (\lambda Tx + \mu Ty)\| \\
&\quad \leq \|T_n(\lambda x + \mu y) - T(\lambda x + \mu y)\| + |\lambda|\|T_n x - Tx\| + |\mu|\|T_n x - Tx\| \to 0,
\end{aligned}
$$

pois cada uma das normas na última expessão converge para zero, quando n tende para o infinito. Consequentemente,

$$T(\lambda x + \mu y) = (\lambda Tx + \mu Ty).$$

Logo, T é de fato linear.

Seja $\{T_n\}$ uma sequência fundamental de operadores lineares limitados, isto é, $T_n \in B(X,Y)$ e, além disso, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que, para todos $m,n > N$, temos $\|T_m - T_n\| < \varepsilon$. Lembrando a definição de norma de operador e o fato de que T_n são lineares, esta última afirmação implica que

$$\|T_m x - T_n x\| = \|(T_m - T_n)x\| \leq \|T_m - T_n\|\|x\| \leq \varepsilon\|x\| \quad \text{para todo } x \in X. \tag{4.2.6}$$

Portanto, para todo $x \in X$, a sequência $\{T_n x\}$ é fundamental em Y. Desde que Y é completo, existe $y \in Y$, tal que $T_n x \to y := Tx$. Desta forma definimos um operador $T : X \to Y$. Logo,

$$\|T_n x - Tx\|_Y \to 0 \quad \text{para todo} \;\; x \in X,$$

e, pelo que provamos anteriormente, o operador T é linear.

O fato de que toda norma é função de Lipschitz com constante um, implica em ???

$$|\|T_n\| - \|T\|| \leq \|T_n - T\| < \varepsilon.$$

Logo, $\|T_n\| \to \|T\|$ e portanto a sequência $\{\|T_n\|\}$ é limitada, isto é, existe $M > 0$, de modo que $\|T_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Este último fato, junto com (4.2.6) implica que, para todo $x \in X$, temos

$$\|Tx - T_n x + T_n x\| \leq \|Tx - T_n x\| + \|T_n x\| \leq (\varepsilon + M)\|x\|.$$

Portanto, T é limitado.

Além disso,

$$\sup_{\|x\|=1} \|(T_n - T)x\|_Y = \|T_n - T\|_{B(X,Y)} \leq \varepsilon.$$

Por isto $T_n \to T$ com respeito a norma em $B(X,Y)$. •

Teorema 4.2.4. (Teorema de Banach-Steinhous) *Sejam X um espaço de Banach e Y um espaço normado. Sejam $T_\alpha : X \to Y$ operadores lineares e limitados para todo $\alpha \in A$. Se, para todo $x \in X$ existe $c(x) > 0$, de modo que $\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha x\| \leq c(x)$, então, existe constante $M > 0$, tal que*

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha\| \leq M.$$

Sucintamente, o Toerema de Banach-Steinhous afirma que, quando X e de Banach e T_α são operadores de $B(X,Y)$ tais que a sequência $\{T_\alpha x\}$ e limitada em todo ponto x de X, então T_α são limitados por norma.

Demonstração:
Sejam

$$F_{\alpha\, n} := \{x \in X \ : \ \|T_\alpha x\| \leq n\}.$$

Os conjuntos $F_{\alpha\, n}$ são fechados. De fato, sejam $x_k \in F_{\alpha\, n}$, com $\|x_k - x\| \to 0$. Portanto, $\|T_\alpha x_k\| \leq n$. Desde que T_α são contínuos, temos que $\|T_\alpha x_k - T_\alpha x\| \to 0$ quando $k \to \infty$ e por isto $\|T_\alpha x_k\| \to \|T_\alpha x\|$. Logo, $\|T_\alpha x\| \leq n$. Então, $x \in F_{\alpha\, n}$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $F_n = \bigcap_{\alpha \in A} F_{\alpha\, n}$. Os conjuntos F_n são fechados pois é dado pela interseção de uma família de conjuntos fechados. Alem disso, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = X$. De fato, se $x \in X$, existe $c(x) > 0$ com a propriedade na afirmação do teorema. Definimos $n = [c(x)] + 1$. Portanto, $\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha x\| \leq c(x) \leq n$ o que significa que $x \in F_n$.

Resumindo, o espaço completo X e coberto por uma quantidade enumerável de conjuntos fechado. Pelo Teorema de Baire, existe pelo menos um F_{n_0} que possui ponto interior, isto é, existe $\delta > 0$, tal que, para todo x com $\|x - x_0\| < \delta$, temos $x \in F_{n_0}$.

Seja $y \in X$ com $\|y\| = 1$ e $z = x_0 + (\delta/2)y$. Logo, $\|z - x_0\| = \delta/2 < \delta$ e por isto $z \in F_{n_0}$. Portanto, $\|T_\alpha z\| \leq n_0$ para todo $\alpha \in A$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|T_\alpha y\| &= \frac{2}{\delta} \|T_\alpha (z - x_0)\| \\ &\leq \frac{2}{\delta} \{\|T_\alpha z\| + \|T_\alpha x_0)\|\} \\ &\leq \frac{4n_0}{\delta}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|T_\alpha\| = \sup_{\|y\|=1} \|T_\alpha y\| \leq \frac{4n_0}{\delta} =: M.$$

Desde que esta desigualdade vale para qualquer índece $\alpha \in A$, temos que $\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha\| \leq M$. •

Antes de mostramos uma aplicação do Toerema de Banach-Steinhous, vamos fazer uma pequena revisão de polinômios interpoladores.

Queremos encontrar um polinômio onde, dada uma função f e um conjunto de ponto x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ este polinômio satisfaz a propriedade $p(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, 1, \ldots, n$. Neste trabalho citaremos apenas a interpolação de Lagrange e mostraremos o método para encontrar, dado uma tabela de n+1 ponto, um polinômio de grau menor ou igual a n que melhor se aproxima da função f dada. Mas antes temos o seguinte teorema que prova a unicidade de tal polinômio.

Teorema 4.2.5. *Sejam (x_i, y_i), $y_i = f(x_i)$; $i = 1, \ldots, n, n+1$ pontos distintos, isto é, $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$. Existe um único polinômio $P(x)$ de grau não maior que n, tal que $P(x_i) = y_i$, para todo i.*

Demonstração:

O polinômio $P(x)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

$P(x)$ é, no máximo de grau n, se $a_n \neq 0$ e, para determinar os coeficientes a_0, a_1, ..., a_n. Como $P_n(x)$ contém os pontos (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$, pode-se escrever que $P_n(x_i) = y_i$, para todo i.

Obtemos assim um sistema (n+1) por (n+1) cuja matriz de coeficientes é dada a seguir: $A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$

Mas, o determinante da matriz A é conhecido como determinante das potências ou de Vandermonde e, da Álgebra Linear, sabe-se que seu valor é dado por:

$$det(A) = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

Como $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, vem que $det(A) \neq 0$.

Logo, $P(x)$ é único. •

Será visto, agora, a dedução da fórmula de interpolação de Lagrange.

Sejam os (n+1) polinômios $p_i(x)$ de grau n:

$p_0 = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$

$p_1 = (x - x_0)(x - x_2)...(x - x_n)$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$p_n = (x - x_0)(x - x_2)...(x - x_{(n-1)})$

ou, de uma forma mais simples,

$p_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$, onde x_j é conhecido.

Tais polinômios possuem as seguintes propriedades:

1. $p_{(i)}(x_i) \neq 0$, para todo i.

2. $p_{(i)}(x_j) = 0$, para todo $i \neq j$.

e são conhecidos como polinômios de Lagrange.

Como o polinômio $P(x)$ que se deseja encontrar é de grau menor ou igual a n e contém os pontos (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$, pode-se escrevê-lo como uma combinação linear dos polinômios $p_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Então, $P_n(x) = b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + \ldots + b_n p_n(x)$.

E, assim, para se determinar $P_n(x)$, basta calcular os valores de b_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, já que o polinômio $p_i(x)$, para todo i, podem ser determinados.

Seja $P_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} b_i p_i(x_k) = b_0 p_o(x_k) + b_1 p_1(x_k) + \ldots + b_n p_n(x_k)$.

Mas, como $p_i(x_k) = 0$ para todo $i \neq j$ e $p_i(x_i) \neq 0$ para todo i, vem: $P_n(x_k) = b_k p_k(x_k)$ e como $P_n(x_k) = y_k$ obtemos,

$b_k = \dfrac{P_n(x_k)}{p_k(x_k)}$.

Variando $k = 0, 1, \ldots, n$ obtemos $b_i = \dfrac{y_i}{p_i(x_i)}$, para todo i.

Substituindo o valor de b_i temos:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{p_i(x)}{p_i(x_i)}.$$

Substituindo os polinômios p_i na equação acima obtemos:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i * \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{x_i - x_j}.$$

Obtendo assim a formula de interpolação de Lagrange.

Mostraremos agora a existência de um polinômio tal que, dada uma função f, este polinômio converge para f.

Definição 4.2.7. *Sejam a, $b \in \mathbb{R}$. Definimos por*

$$a \vee b = \max\{a, b\};$$

$$a \wedge b = \max\{a, b\}.$$

Lema 4.2.3. *Sejam a, $b \in \mathbb{R}$, então*

1. $a \vee b = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$;
2. $a \wedge b = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$.

Demonstração

1. Se $a \geq b$ temos $a \vee b = \frac{1}{2}(a + b + a - b) = a = \max\{a, b\}$

   Se $a < b$ temos $a \vee b = \frac{1}{2}(a + b - a + b) = b = \max\{a, b\}$
2. A demonstração é análoga ao item anterior. •

Definição 4.2.8. *Seja X um espaço métrico. Um subconjunto $A \subset \mathcal{C}(X)$ é uma subalgebra se*

1. *A é um subespaço vetorial.*
2. *Se f, $g \in A$ então $f.g \in A$*

Definição 4.2.9. *Sejam X um espaço métrico e $A \subset \mathcal{C}(X)$. Dizemos que A separa pontos se para todo $x \neq y$, x, $y \in X$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

Antes do proximo lema, vamos considerar a seguinte sequência de polinômios.

$$Q_0(x) := 1 \text{ e } Q_{n+1} := \frac{1}{2}(1 - x^2 + {Q_n}^2(x)).$$

Mostremos que

$$0 \leq Q_{n+1}(x) \leq Q_n(x) \leq 1, \qquad n = 0, 1, \ldots, \; x \in [-1, 1].$$

Tomamos inicialmente $x = 1$ ou $x = -1$ (tomaremos x=1) temos:

$$Q_{n+1}(1) = \frac{1}{2}(1 - 1 + Q_n^2(1)) = \frac{1}{2}Q_n^2(1) \geq 0.$$

Para obtermos que $Q_n(1) \leq 1$, usaremos a principio de indução finita (ou indução matemática).

Assim, para n=1 temos

$$Q_1(1) = \frac{1}{2}(1 - 1 + 1^2) = \frac{1}{2},$$

ou seja a propriedade se satisfaz para n=1.

Supondo pra n=k que $Q_k(1) \leq 1$ obtemos

$$Q_k^2(1) \leq 1 \Rightarrow \frac{Q_k^2(1)}{2} \leq \frac{1}{2},$$

e assim temos,

$$Q_{k+1} = \frac{1}{2}(1 - 1 + Q_k^2) = \frac{Q_k^2}{2} \leq 1.$$

Agora, vamos mostrar que a propriedade é válida para x pertencente ao intervalo de -1 a 1.

Assim para $x \in (-1, 1)$ temos,

$$Q_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2 + Q_n^2(x)).$$

Como $|x| < 1$ temos $x^2 < 1$ e desse modo $1 - x > 0$ e além disso, $Q_n^2 \geq 0$ temos $Q_{n+1} \geq 0$.

Novamente usando a principio de indução finita, mostremos que $Q_n(x) \leq 1$ para todo x pertencente ao intervalo $(-1, 1)$, Seja x um ponto qualquer desse intervalo.

Para n=1 temos $Q_1(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2 + 1)$. Assim como anteriormente

$$1 - x^2 \leq 1 \Rightarrow 1 - x^2 \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2}(1 - x^2 + 1 \leq 1)$$

e portanto, $Q_1 \leq 1$.

Supondo para n=k que $Q_k(x) \leq 1$ obtemos $Q_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2 + Q_n^2(x))$. Novamente temos que $1 - x^2 \leq 1$ e por hipótese de indução obtemos $Q_n^2(x) \leq 1$. Com isso,

$$1 - x^2 \leq 1 \Rightarrow 1 - x^2 + Q_n^2(x) \leq 1 + Q_n^2(x) \leq 1 + 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(1 - x^2 + Q_n^2(x)) \leq 1.$$

Mostraremos agora que a sequência é não crescente, ou seja, $Q_{n+1}(x) \leq Q_n(x)$.

Com efeito, usando o principio de indução finita temos que para n=1 e x pertencente ao intervalo $[-1, 1]$ a seguinte condição

$$Q_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{x^2}{2} = Q_0 - \frac{x^2}{2} \leq Q_0.$$

Agora, supondo que para n=k temos $Q_k(x) \leq Q_{k-1}(x)$ obtemos,

$$\frac{Q_{k+1}(x)}{Q_n(x)} = \frac{(1 - x^2 + Q_k^2(x))}{2Q_k(x)} \leq \frac{(1 - x^2 + Q_k^2(x))}{Q_k(x)} = \frac{(1 - x^2)}{Q_k(x)} + Q_k(x)$$

$$= \frac{(1 - x^2 + Q_{k-1}^2(x))}{Q_k(x)} - Q_{k-1}(x)\frac{Q_{k-1}(x)}{Q_k(x)} + Q_k(x) = \frac{Q_k(x)}{Q_k(x)} - Q_{k-1}(x)\frac{Q_{k-1}(x)}{Q_k(x)} + Q_k(x)$$

$$= 1 - Q_{k-1}(x)\frac{Q_{k-1}(x)}{Q_k(x)} + Q_k(x) \leq 1 - Q_{k-1}(x) + Q_k(x) \leq 1.$$

Logo, a sequência é não crescente.

Após mostrarmos que a sequência é monôtona e limitada em um conjunto compacto, vimos que essa sequência converge uniformemente. Assim, existe uma função f tal que $Q_n(x) \rightrightarrows P$.

Temos que $Q_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2 + Q_n^2(x))$. fazendo n tender ao infinito obtemos

$$P = \frac{1}{2}(1 - x^2 + P^2) \Rightarrow 2P = 1 - x^2 + P^2 \Rightarrow P^2 - 2P + (1 - x^2) = 0.$$

Calculando as raízes dessa equação em função de x obtemos $P = 1 + |x|$ e $P = 1 - |x|$. Como a sequência converge para uma função também limitada no intervalo $[0, 1]$ $(0 \leq Q_n(x) \leq 1)$, podemos excluir a primeira raiz. Assim $P = 1 - |x|$.

Agora se tomarmos a sequência $H_n(x) = 1 - Q_n(x)$ temos que $H_n(x) \to |x|$.

Assim, temos uma sequência que converge uniformemente para a função valor absoluto. Assim, podemos mostrar o proximo lema.

Lema 4.2.4. *Sejam X um espaço métrico compacto e $A \subset \mathcal{C}(X)$ uma subalgebra. Se $f, g \in \bar{A}$, então $f \vee g$ $(f \wedge g)$ é o conjunto de todos os limites uniformes de A.*

Demonstração

Faremos para ao caso $f \wedge g$, pois o outro de modo análogo.

Por hipótese f, g $\in$ A e A é uma subalgebra que contém $f \equiv 1$. Pela definição de subalgebra temos que A é um espaço vetorial e assim, como g $\in$ A então -g $\in$ A.

Com isso, temos que f+g $\in$ A e f-g $\in$ A.

Falta mostrar então que se f$\in$ A então $|f| \in A$.

Sejam $a = inf\{f(x), x \in X\}$, $b = sup\{f(x), x \in X\}$ e $p_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de polinômios tal que $\lim_{n \in \infty} p_n(x) = |f(x)|$ (mostraremos um exemplo dessa sequência). Então, $\lim_{n \longrightarrow \infty} p_n(f(x))$ converge para $|f(x)|$ uniformemente em X. O fato de A contém as funções constantes, garante que $p_n(f(x) \in A$. Logo $|f(x)| \in \bar{A}$.

E assim, usando o item 1 do lema 4.2.3 temos que $f \wedge g \in A$. •

Lema 4.2.5. *Sejam X um compacto e $A \subset \mathcal{C}(X)$ uma algebra que separa pontos e A contém a função $f \equiv 1$. Seja α, $\beta \in \mathbb{R}$ e $x_0 \neq y_0$, x_0, $y_0 \in X$, então existe pelo menos uma função $f \in A$ tal que $f(x_0) = \alpha$ e $f(y_0) = \beta$.*

Demonstração

Por hipótese A separa pontos. Assim, como $x_0 \neq y_0$ existe uma função $g \in A$ tal que $g(x_0) \neq g(y_0)$.

Considere f da seguinte forma:

$$f := \left[\frac{\alpha - \beta}{g(x_0) - g(y_0)}\right] g + \frac{\alpha g(x_0) - \beta g(y_0)}{g(x_0) - g(y_0)} 1$$

Como A é uma subalgebra $f \in A$. •

Agora mostraremos o Teorema chave, que mostrará que toda função contínua em um compacto pode ser por um polinômio.

Teorema 4.2.6. *(Teorema de Stone-Weierstrass) Seja X um espaço compacto de Hausdorff, então uma subalgebra $A \subset \mathcal{C}(X)$, que contém, $f \equiv 1$ e separa pontos é denso em $\mathcal{C}(X)$.*

Demonstração

Mostremos que para toda $f \in \mathcal{C}(X)$ e todo $\epsilon > 0$, existe $g \in \bar{A}$ tal que $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ qualquer que seja $x \in X$.

Dados quaisquer x, $y \in X$, existe $g_{xy} \in A$ tal que $g_{xy}(x) = f(x)$ e $g_{xy}(y) = f(y)$. Isto ocorre do Lema 4.2.5 se $x \neq y$ e se $x = y$ basta tomar g_{xy} constante.

Por continuidade, para cada $x \in X$, cada ponto $x \in X$ possui uma vizinhança V_{xy} tal que $z \in V_{xy} \Rightarrow g_{xy}(z) > f(z) - \epsilon$.

Como X é compacto, existem y_1, y_2, $\ldots$, $y_n \in X$ tais que $X = V_{xy_1} \cup \ldots \cup V_{xy_n}$.

Seja $g_x = g_{xy_1} \vee g_{xy_2} \vee \ldots \vee g_{xy_2}$. Então $g_x \in \bar{A}$ (pelo lema 2) e $g_x(x) = f(x)$ e $f(z) - \epsilon < g_x(z)$ para todo $z \in X$.

Por continuidade, cada ponto $x \in X$ possui uma vizinhança U_x tal que $z \in U_x \Rightarrow g_x(z) < f(z) + \epsilon$. Sendo X compacto, existem x_1, x_2, $\ldots$, $x_m \in X$ tais que $X = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_m}$. Seja $g = g_{x_1} \wedge g_{x_2} \wedge \ldots \wedge g_{x_m}$ Então $g \in \bar{A}$ e, para cada $z \in X$ tem-se $f(z) - \epsilon < g(z) < f(z) + \epsilon$, ou seja, $|f(z) - g(z)| < \epsilon$.

Disso, concluímos que $\bar{A}$ é denso em $\mathcal{C}(\mathcal{X})$. Assim, para essa $f \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$ e $\epsilon > 0$, existe $g \in \bar{A}$ tal que $||f - g|| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Como $g \in \bar{A}$ temos que, existe uma sequência h_n de funções em A e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||h_{n_0} - g|| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Assim, para esse $\epsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ temos

$$||h_{n_0} - f|| = ||h_{n_0} - g + g - f|| \leq ||h_{n_0} - g|| + ||g - f|| \leq \epsilon.$$

Logo, A também é denso em $\mathcal{C}(\mathcal{X}), comoqueriamosdemosntrar.$ •

Observe que o conjunto dos polinômios é uma subalgebra que satisfaz as condições do teorema anterior. Assim, para toda função contínua em um compacto, existe uma sequência de polinômios $\{p_n\}$ tal que $p_n \to f$.

Mas, quando interpolamos uma função f por um polinômio de grau menor ou igual a n por ponto $x_0, x_1, \dots, x_n$ obtemos um erro que pode ser calculado pela seguinte formula:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i),$$

para algum ξ em X. O limite acima do erro, sugere que escolhamos os pontos de interpolação x_i de tal modo que $\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ seja o menor possível. Isto ocorre quando escolhemos os pontos de Chebyshev.

Não demonstraremo todas as afirmações sobre polinômios interpoladores, pois teriamos que aprofundar mais na teoria de calculo numérico e neste caso estamos querendo encontrar uma aplicação para o teorema de Banach-Steinhaus.

Definição 4.2.10. *A constante de Lebesgue Λ é definida pela norma de X, onde X é a projeção do espaço de todos os polinômios interpoladores de grau menor ou igual a n da seguinte forma:*

$$||f - X(f)|| \leq (l+1)||f - p^*||,$$

onde p^* é o polinômio interpolador de Lagrange.

Queremos encontrar ponto x_i tal que a constante de Lebesgue Λ seja a menor possível. Isto ocorre quando escolhemos os pontos de Chebyshev e assim obtemos a seguinte condição para Λ.

$$\Lambda \geq \frac{2}{\pi} log(n+1) + C$$

para alguma constante C.

Podemos então mostrar o seguinte teorema.

Teorema 4.2.7. *Para toda função $f(x)$ contínua em um intervalo [a,b], existe uma tabela de nós tal que a sequência dos polinômios interpoladores $p_n(x)$ converge converge para f(x) uniformemente em [a.b].*

O teorema acima garante que para qualquer função existe uma tabela de nós tal que o polinômio interpolador converge uniformemente para f.

Mas será que é possível obtermos uma tabela de pontos tal que para qualquer função f o polinômio interpolador que passa pelos n pontos da tabela, converge uniformemente para f?

O teorema a seguir afirma que isso não é possível e em sua demonstração (que também será omitida) é construído um conjunto de projeções de polinômios que convergem para f, mas não uniformemente, pois pelo teorema de Banach-Steinhous isso só seria possível se este conjunto fosse limitado uniformemente, o que não ocorre.

Teorema 4.2.8. *Dada uma tabela de ponto pertencentes a um intervalo [a,b], existe uma função f em [a,b] tal que a sequência de polinômios interpoladores que passam por estes pontos, divergem em [a,b].*

<u>Demonstração</u>.

Considere $T_n : \mathcal{C}[a,b] \rightarrow \mathbb{P}_n[a,b]$ tal que $T_n(f) = \mathbb{P}_n(f,X)(x) = \sum_{i=1}^{n} l_i(x)f(x_i)$, onde X é o conjunto de n+1 pontos, tal que $f(x) = p_n(x)$ e $l_i(x)$ é o polinômio racional obtido através da interpolação de Lagrange.

Considerando a seguinte norma:

$$||f|| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|,$$

temos também que $\mathcal{C}[a,b]$ é um espaço de Banach (Estamos apenas considerando o espaço $\mathcal{C}[a,b]$).

Obtemos,

$\mathbb{P}_n(f,X)(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i f(x_i) \Rightarrow |\mathbb{P}_n(f,X)(x)| = |\sum_{i=0}^{n} l_i f(x_i)| \leq$

$\leq \sum_{i=0}^{n} |l_i||f(x_i)| \leq ||f|| \sum_{i=0}^{n} |l_i|.$

Assim,

$|\mathbb{P}_n(f,X)(x)| \leq ||f||\Lambda_n(x)$

$\Lambda_n(x) = \max_{a \leq x \leq b} \sum_{i=0}^{n} |l_i|$ é a constante de Lesbegue de ordem n.

Podemos assim escrever a seguinte inequação:

$\dfrac{|\mathbb{P}_n(f,X)(x)|}{||f||} \leq \Lambda_n(x) \Rightarrow \dfrac{||\mathbb{P}_n(f,X)||}{||f||} \leq \Lambda_n(x).$

Como ambos os lados da inequação acima não dependem de x, temos

$||T_n|| \sup_{f \neq 0} ||\dfrac{\mathbb{P}_n(f,X)||}{||f||} \leq \Lambda_n(x).$

Considere $f \in \mathcal{C}[a.b]$ tal que $||f|| \leq 1$ para todo $x \in [a,b]$, onde

$f(x_i) = \begin{cases} \dfrac{|l_i(y)|}{l_i(y)}, & \text{se } ;l_i(y) \neq 0 \\ 1, & \text{se } l_i(y) = 0 \end{cases}$

onde y é tal que $\Lambda_n(X) = \max_x \sum_{i=0}^{n} |l_i(x_i)| = \sum_{i=0}^{n} |l_i(y)|$.

Temos então,

$|\mathbb{P}_n(f,X)(x)| = |\sum_{i=0}^{n} l_i(x)\frac{|l_i(y)|}{l_i(y)}| \leq \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)| \leq \Lambda_n(X)$.

Assim,

$|\mathbb{P}_n(f,X)(y)| = |\sum_{i=0}^{n} l_i(y)\frac{|l_i(y)|}{l_i(y)}| = \sum_{i=0}^{n} |l_i(y)| = \Lambda_n(X)$.

Com isso, $||\mathbb{P}_n(f,X)|| = \Lambda_n(X)$ e como $||f|| = 1$ temos $\frac{||\mathbb{P}_n(f,X)||}{||f||} = \Lambda(X)$, ou seja, $||T_n|| = \Lambda_n(X)$.

Pela teoria de polinômios interpoladores temos que

$$\Lambda_n(X) > \frac{2}{\pi^2}log(n) - 1.$$

Como $||T_n(f)|| \to \infty$ quando $n \to \infty$, temos pelo teorema de Banach-Steinhous que $||T_n(f)|| = ||\frac{\mathbb{P}_n(f,X)}{||f||}||$ não converge para alguma f. •

4.2.1 Exercícios

1. Mostre que para $1 \leq p < \infty$, l_p é um espaço métrico.

   Considere $d(x,y) = (\sum |x_j - y_j|^P)^{\frac{1}{p}}$.

   Demonstração.

   Para quaisquer $x, y \in l^p$ temos:

   $d(x,y) = (\sum |x_j - y_j|^P)^{\frac{1}{p}} = (\sum |x_j - z_j + z_j - y_j|^P)^{\frac{1}{p}} \leq$

   $\leq (\sum |x_j - z_j|^P)^{\frac{1}{p}} + (\sum |z_j - y_j|^P)^{\frac{1}{p}} = d(x,z) + d(z,y)$.

   Como $d(x,y) \geq 0$ pois é soma de valores não negativos temos que l^p é um espaço métrico. •

2. Mostre que pela inequação de Cauchy-Schwarz obtemos a seguinte inequação:

$$(|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|)^2 \leq n(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots |x_n|^2).$$

3. Encontre uma sequência x que está em l^p para $p > 1$ e $x \notin l^p$.

   Demonstração.

   Basta considerar a sequência $(x_n) = \frac{1}{n}$. •

4. O diâmetro de um conjunto A ($\delta(A)$), onde A é um conjunto não vazio em um espaço métrico (X,d) é definido por
$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y).$$
Dizemos que A é limitado se $\delta(A) < \infty$. Mostre que $A \subset B$, então $z\delta(A) \leq \delta(B)$.

5. O espaço l^∞ é não separável.

6. O espaço l^p com $1 \leq p < \infty$ é separável.

   Demonstração.

   Seja M o conjunto de todas as sequências y de forma que
$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots)$$
   onde n é qualquer valor positivo inteiro e os valores $y_i \in \mathbb{Q}$ para todo i. Mostremos que M é denso em l^p. Seja $x = (x_j) \in l^p$ uma sequência qualquer.

   Então para todo $\epsilon > 0$ existe um n (que depende de ϵ) tal que
$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^p \leq \frac{\epsilon^P}{2}$$
   porque a série é convergente. Sabemos que os racionais são densos em $\mathbb{R}$. Assim, para cada x_j existe um racional y_j próximo o suficiente que satisfaça
$$\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^p < \frac{\epsilon^p}{2}.$$
   Isto nos garante que
$$[d(x,y)]^p = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^p + \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^p < \epsilon^p.$$
   Assim, obtemos $d(x,y) < \epsilon$ e disso temos que M é denso em l^p. Logo M é separável.

   •

7. Sejam X e Y espaços lineares normados e $A : X \to Y$ uma transformação linear limitada. Mostre que A pode ser extendida por $B : X^* \to Y^*$, onde B é uma transformação linear limitada tal que $||A|| = ||B||$ e X^* e Y^* são obtidos a partir de X e Y respectivamente.

8. Sejam X um espaço vetorial normado e $A : X \to Y$ uma transformação linear. Supondo que exista um vetor x não nulo e um escalar λ tal que $Ax = \lambda$ então $||A|| \leq \lambda$

9. Seja X um espaço linear normado. Mostre que se $\{x_n\}$ converge uniformemente para x, então existe uma sequência de combinação linear $\{sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^{(n)} x_i^{(n)}\}$ que converge para x onde $x_i^{(n)}$ são termos da sequência original.

10. Se X e Y são espaços lineares normados e se $A : X \to Y$ é um isomorfismo em Y e ainda temos que A e A^{-1} são contínuas, então mostre que $||A^{-1}|| \geq ||A||^{-1}$