

Introdução ao Cálculo Numérico 2005

Lista de Exercícios 2

Observação importante: Resolva o problema para o dia da prova com a função $f(x) = \cos(\pi x/2)$ e não com $f(x) = \sin(\pi x)$!

Problema 1. Sejam $\{x_i, y_i\}_{i=0}^n$ números reais, com $x_0 < x_1 < \dots < x_m$. Calcular o polinômio $p(x) = Mx + B$, para o qual a quantidade

$$S(M, B) = \sum_{i=0}^n (y_i - Mx_i - B)^2$$

seja mínima.

Problema 2. Encontrar o polinômio de grau um que melhor aproxima, pelo método dos mínimos quadrados, a tabela $\{x_m, f(x_m)\}_{m=0}^n, x_m = m/n$.

Problema 3. Determinar o polinômio de grau dois que melhor aproxima, pelo método dos mínimos quadrados, a tabela

x	0	1	2	3	4
y	1	2	1	0	4

Problema 4. Determinar as parábolas que melhor aproximam, pelo método dos mínimos quadrados, as tabelas

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	15	-9	10	7	6

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	15	1	10	7	6

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	7	4	-1	1	5	6	13

Problema 5. Encontrar a parábola que melhor aproxima, pelo método dos mínimos quadrados a tabela $\{x_i, y_i\}_{i=0}^n, x_i = x_0 + ih$.

Problema 6. Provar que, se f é uma função par (ímpar) e os pontos $x_k, k = 0, 1, \dots, m$ são simétricos com respeito à origem, isto é, $x_k = -x_{m-k}$, então o polinômio de grau n que melhor aproxima $f(x)$, pelo método dos mínimos quadrados, nos pontos $x_0, \dots, x_m$, é também par (ímpar).

Problema 7. Prova que, se f é uma função par (ímpar) em $[-a, a]$, então o polinômio de grau n que melhor a aproxima em $L_2[-a, a]$ é também par (ímpar).

Problema 8. Pelo método dos mínimos quadrados, aproximar a função $\sin \pi x$, se os pontos são $x_0 = -1$, $x_1 = -1/2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1/2$, $x_4 = 1$.

Problema 9. Aproximar por polinômio de grau um, pelo método dos mínimos quadrados, a tabela

x	x_0	x_1	$\dots$	x_{n-1}	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_{n-1}	y_n
p	p_0	p_1	$\dots$	p_{n-1}	p_n

onde p_i são os pesos nos pontos x_i .

Problema 10. Seja

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} x_i = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, m \geq n,$$

um sistema linear sobre-determinado, com n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ e m equações, $m \geq n$. Prove que o sistema $\partial s / \partial x_p = 0$, $p = 1, 2, \dots, n$, onde

$$s(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^m \left(b_k - \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i \right)^2,$$

é equivalente ao sistema $A^T A x = A^T b$.

Aqui, por A^T denotamos a matriz transposta de A .

Problema 11. Resolva o sistema sobre-determinado pelo método dos mínimos quadrados:

$$\left| \begin{array}{l} x - y = 1, \\ x + y = 1, \\ x + y = -1, \\ x - y = -1. \end{array} \right.$$

Problema 12. Resolva os sistemas sobre-determinado pelo método dos mínimos quadrados:

$$\left| \begin{array}{l} x + z = 1, \\ y + z = 1, \\ x + z = 1, \\ x - y + z = 1; \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 3, \\ 2x - y = 0, 2, \\ x + 3z = 7, \\ 3x + y = 5; \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x + y + z = 1, \\ x + 2y + z = 2, \\ x + 3y + z = 3, \\ x - 4y + z = 4; \\ x + 5y + z = 4, \end{array} \right.$$

Problema 13. Usando o resultado obtido na solução do Problema 5, isto é, a parábola que melhor aproxima, pelo método dos mínimos quadrados a tabela

$$\{x_i, y_i\}_{i=k-2}^{k+2}, \quad x_{k+i} = x_{k-2} + (i+2)h, \quad i = -2, -1, \dots, 2,$$

obter as fórmulas

$$y(x_{k-2}) \approx y_{k-2} + \frac{1}{5}\Delta^3 y_{k-2} + \frac{3}{35}\Delta^4 y_{k-2};$$

$$y(x_{k-1}) \approx y_{k-1} + \frac{2}{5}\Delta^3 y_{k-2} + \frac{1}{7}\Delta^4 y_{k-2};$$

$$y(x_k) \approx y_k - \frac{3}{35}(y_{k-2} - 4y_{k-1} + 6y_k - 4y_{k+1} + y_{k+2});$$

$$y'(x_k) \approx \frac{1}{10h}(-2y_{k-2} - y_{k-1} + y_{k+1} + 2y_{k+2});$$

Problema 14. Usando a parábola, construída pelo método dos mínimos quadrados, para a tabela $\{x_i, y_i\}_{i=0}^3$, $x_i = x_0 + ih$, obter as fórmulas para diferenciação aproximada

$$y'_0 \approx \frac{1}{20h}(-21y_0 + 13y_1 + 17y_2 - 9y_3);$$

$$y'_1 \approx \frac{1}{20h}(-11y_0 + 3y_1 + 7y_2 - y_3);$$

$$y'_2 \approx \frac{1}{20h}(-11y_3 + 3y_2 + 7y_1 - y_0);$$

$$y'_3 \approx \frac{1}{20h}(-21y_3 + 13y_2 + 17y_1 - 9y_0);$$

Problema 15. Usando a expansão em série da função integrada, calculem aproximadamente a integral

$$I = \int_0^{0,5} \frac{\operatorname{tg} x}{x} dx.$$

Problema 16. Usando a expansão de Maclaurin da função integrada, determine o número dos termos que devem ser usados para calcular, com erro

que não excede $\varepsilon \leq 10^{-5}$, as integrais:

- a) $\int_0^1 \sqrt{x} \sin x \, dx;$
- b) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \, dx;$
- c) $\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}};$
- d) $\int_0^1 \exp(-x^2) dx.$

Problema 17. Calcular os limites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+4} \dots + \frac{1}{2n^2} \right\}$$

Problema 18. Mostrar que

a) a fórmula de quadratura dos paralelogramos

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f(\xi) =: Q_P(f), \quad a \leq \xi \leq b$$

possui grau de precisão algébrica um quando $\xi = (a+b)/2$ e zero, caso contrário.

b) a fórmula de quadratura dos trapézios

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] =: Q_T(f)$$

possui grau de precisão algébrica um.

c) a fórmula de quadratura de Simpson

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)] =: Q_S(f)$$

tem grau de precisão algébrica três.

Problema 19. Mostrar que

$$Q_S(f) = \frac{1}{3} Q_T(f) + \frac{2}{3} Q_P(f), \quad \text{quando } \xi = (a+b)/2.$$

Problema 20. Construir a fórmula de quadratura da forma

$$\int_0^{2h} f(x) dx \approx h[Af(0) + Bf(h) + Cf(2h)]$$

com o maior possível grau de precisão algébrica.

Problema 21. Determinar as constantes a e c , de modo que a fórmula de quadratura

$$\int_{-h}^h f(x)dx \approx c[f(ah) + f(bh)]$$

tenha o maior grau de precisão algébrica.

Problema 22. Determinar a, b, c, d e A de modo que a fórmula de quadratura

$$\int_{-2}^2 f(x)dx \approx A[f(a) + f(b) + f(c) + f(d)]$$

tenha o maior grau de precisão algébrica.

Problema 23. Determinar A, B, C, D e E de modo que a fórmula de quadratura

$$\int_0^{2h} f(x)dx \approx h[Af(0) + Bf(h) + Cf(2h)] + h^2[Df'(0) + Ef'(2h)]$$

tenha o maior possível grau de precisão algébrica.

Problema 24. Determinar A e B , de modo que a fórmula de quadratura

$$\int_0^h \frac{f(x)}{1+x^2}dx \approx Af(0) + Bf(h)$$

tenha o maior possível grau de precisão algébrica.

Problema 25. Determinar os coeficientes a_i, b_i , $i = 1, 2, 3$, de modo que

$$\int_{-h}^h f(x)dx \approx h[a_1f(-h) + a_2f(0) + a_3f(h)] + h^2[b_1f'(-h) + b_2f'(0) + b_3f'(h)]$$

possua o maior possível grau de precisão algébrica.

Problema 26. Mostrar que a fórmula de quadratura

$$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(0) + f(h)] - \frac{h^3}{24}[f''(0) + f''(h)]$$

é exata para todos os polinômios de grau três.

Problema 27. Provar que a fórmula de quadratura

$$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(0) + f(h)] + \frac{h^2}{10}[f'(0) - f'(h)] + \frac{h^3}{120}[f''(0) + f''(h)].$$

possua grau de precisão algébrica cinco.

Problema 28. Mostrar que a fórmula de quadratura

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{3}{8} f\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{27}{56} f\left(\frac{11}{18}\right) + \frac{1}{7} f(1)$$

tem grau de precisão algébrica dois.

Problema 29. Seja $Q(f)$ uma fórmula de quadratura para aproximação da integral $\int_0^1 f(x) dx$. Provar que a n -ésima fórmula de quadratura composta, baseada em $Q(f)$ pode ser representada como $Q(\varphi_n)$, onde

$$\varphi_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+x}{n}\right).$$

Problema 30. Mostre que, para $t \in [a, b]$, os núcleos de Peano $K_r(Q; t)$ para o erro da fórmula de quadratura

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n a_k f(x_k),$$

cujos grau de precisão algébrica é $m-1$, pode ser representado como:

$$a) \quad K_r(Q; t) = \frac{(b-t)^r}{r!} - \sum_{k=1}^n a_k \frac{(x_k - t)^{r-1} +}{(r-1)!},$$

ou

$$b) \quad K_r(Q; t) = (-1)^r \left[\frac{(t-a)^r}{r!} - \sum_{k=1}^n a_k \frac{(t-x_k)^{r-1} +}{(r-1)!} \right],$$

para $r = 1, 2, \dots, m$.

Problema 31. Provar que os coeficientes a_j da fórmula de quadratura

$$Q(f) = \sum_{j=1}^n a_j f(x_j)$$

podem ser representados através das fórmulas

$$a_j = (-1)^r [K_r^{(r-1)}(Q; x_j + 0) - K_r^{(r-1)}(Q; x_j - 0)], \quad j = 1, \dots, n.$$

Problema 32. Mostrar que

$$\frac{d}{dt} K_r(Q; t) = -K_{r-1}(Q; t).$$

Problema 33. Mostrar que, para o erro da fórmula de trapézio composta

$$I(f) := \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left[\frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right] := Q_T^n(f),$$

vale a estimativa

$$|I(f) - Q_T^n(f)| \leq (b-a) \omega\left(f; \frac{b-a}{n}\right),$$

onde

$$\omega(f; \delta) := \sup\{|f(t') - f(t'')| : t', t'' \in [a, b], |t' - t''| \leq \delta\}$$

é o módulo de continuidade da função $f(x)$.

Problema 34. *Seja*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n a_k f(x_k) =: Q(f)$$

uma fórmula de quadratura simétrica, isto é,

$$x_k - a = b - x_{n+1-k}, \quad a_k = a_{n+1-k}, \quad k = 1, \dots, [(n+1)/2].$$

Provar que

$$K_r(Q; a+b-t) = (-1)^r K_r(Q; t)$$

para todo $t \in [a, b]$.

Problema 35. *Provar que, se*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n a_k f(x_k) =: Q(f)$$

é uma fórmula de quadratura simétrica, então

$$\int_a^b |K_r(Q; t)|dt = 2 \int_a^{(a+b)/2} |K_r(Q; tx)|dt.$$

Problema 36. *Sejam*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n a_k f(x_k) =: Q(f)$$

e $Q_m(f)$ a m -ésima fórmula de quadratura composta, baseada na $Q(f)$. Mostre que

$$K_r(Q_m; t) = \frac{1}{m^r} K_r(Q; mt - j) \quad \text{para } t \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n} \right), j = 0, \dots, n-1.$$

Problema 37. *Seja $m \in \mathbb{N}$ e $Q(f)$ uma fórmula de quadratura com grau de precisão algébrica $m-1$, para cálculo aproximado da integral $\int_a^b f(x)dx$. Se para o erro desta fórmula em W_∞^r , $1 \leq r \leq m$, vale a desigualdade*

$$\sup_{f \in W_\infty^r[a,b]} \left| \int_a^b f(x)dx - Q(f) \right| \leq A,$$

prove que para a n -ésima fórmula composta $Q_n(f)$, obtida através de $Q(f)$, vale a estimativa

$$\sup_{f \in W_\infty^r[a,b]} \left| \int_a^b f(x)dx - Q_n(f) \right| \leq \frac{A}{n^r}.$$

Problema 38. *Seja*

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n a_k f(x_k) := Q(f)$$

uma fórmula de quadratura com grau de precisão algébrica $m - 1 \geq 1$. Se o núcleo de Peano do seu erro $K_r(Q; t)$, $1 \leq r \leq m$ possui um zero $\tau \in (0, 1)$, prove que esta fórmula é exata para a função $f(x) = (x - \tau)_+^{r-1}$.

Prove a seguinte afirmação mais geral: Se $\tau \in (0, 1)$ é um zero com multiplicidade s de $K_r(Q; t)$, onde $1 \leq s \leq r - 1$, a fórmula de quadratura $Q(f)$ é exata para as funções

$$(x - \tau)_+^{r-1}, (x - \tau)_+^{r-2}, \dots, (x - \tau)_+^{r-s}.$$

Problema 39. Calcular os erros das fórmulas de quadratura do ponto médio, do trapézio e de Simpson, para o espaço $W_\infty^1[a, b]$. Quais os erros das correspondentes fórmulas compostas?

Problema 40. Calcular os erros das fórmulas de quadratura do ponto médio, do trapézio e de Simpson, para o espaço $W_\infty^2[a, b]$. Quais os erros das correspondentes fórmulas compostas?

Problema 41. Seja $f \in C^2[a, b]$. Provar que existem pontos ξ_1 e ξ_2 no intervalo $[a, b]$, tais que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \frac{f(\xi_1)}{24}(b-a)^3, \\ \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] &= -\frac{f(\xi_2)}{12}(b-a)^3. \end{aligned}$$

Problema 42. Provar que, se $f(x)$ é uma função convexa em $[a, b]$, então

$$Q_P(f) \leq \int_a^b f(x)dx \leq Q_T(f).$$

Problema 43. Provar que a seguinte estimativa para a fórmula de quadratura de Simpson em $W_\infty^3[a, b]$ é válida:

$$\sup_{f \in W_\infty^3[a, b]} \left| \int_a^b f(x)dx - Q_S(f) \right| = M \frac{(b-a)^4}{576}.$$

Problema 44. Estimar os erros das fórmulas de Simpson simples e composta para a classe $W_\infty^4[a, b]$.

Problema 45. Seja $f \in C^4[a, b]$. Provar que existe um ponto $\xi_3 \in [a, b]$, tal que

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] = -\frac{f^{(4)}(\xi_3)}{2880}(b-a)^5.$$

Problema 46. Seja $f \in C^3[0, 1]$ e $0 < m \leq |f'''(x)| \leq M$ para todo $x \in [0, 1]$. De acordo com o Problema 41, existem $\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$, tais que

$$\int_0^1 f(x)dx - f(1/2) = \frac{f(\xi_1)}{24}, \quad \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] = -\frac{f(\xi_2)}{12}.$$

Prove que $|\xi_1 - \xi_2| \leq \min\{1, M/(16m)\}$.

Problema 47. Usando a afirmação do Problema 41, prove que existem pontos $\eta_1, \eta_2 \in [0, 1]$, tais que

$$\int_0^1 f(x)dx - 2f(1/2) + \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] = \frac{f(\eta_1)}{6};$$

$$\int_0^1 f(x)dx - \frac{3}{4}f(1/2) + \frac{1}{6}[f(0) + f(1)] = \frac{f(\eta_2)}{12}.$$

Problema 48. Se $f \in C^2[0, 1]$, prove que existe um ponto $\xi \in [0, 1]$, tal que

$$\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2}[f(1/4) + f(3/4)] = \frac{f(\xi)}{96}.$$

Problema 49. Se $f \in C^2[0, 1]$, prove que existe um ponto $\xi \in [0, 1]$, tal que

$$\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2}[f(1/3) + f(2/3)] = \frac{f(\xi)}{36}.$$

Problema 50. Resolver o Problema 40 para o espaço $W_2^2[a, b]$.

Problema 51. Seja $f \in C^2[0, 1]$. Prove que

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3}{8}h[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3}{80}f^{(4)}(\xi)h^5,$$

onde $a < \xi < b$, $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, 2, 3$ e $h = (b - a)/3$.

Problema 52.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{4}{3}h[2f(x_1) + f(x_2) + 2f(x_3)] + \frac{14}{45}f^{(4)}(\xi)h^5,$$

$a < \xi < b$, $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, 2, 3$ e $h = (b - a)/4$.

Problema 53. Seja $f(x)$ uma função cuja derivada é integrável e com módulo que não excede um em $[0, 1]$. Determinar o menor número de nós da fórmula de quadratura composta do ponto médio (trapézio, Simpson) para calcular $\int_0^1 f(x)dx$ com erro menos que 0.001.

Problema 54. Seja $f \in C^4[a, b]$. Prove que

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3}{8}h[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3}{80}f^{(4)}(\xi)h^5,$$

onde $a < \xi < b$, $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, 2, 3$, e $h = (b - a)/3$.

Problema 55. Seja $f \in C^4[a, b]$. Prove que

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{4}{3}h[2f(x_1) + f(x_2) + 2f(x_3)] - \frac{14}{45}f^{(4)}(\xi)h^5,$$

onde $a < \xi < b$, $x_k = a + kh$, $k = 1, 2, 3$, e $h = (b - a)/4$.

Problema 56. *Seja $f(x)$ uma função cuja primeira derivada existe, é integrável e o seu módulo não excede um em $[0, 1]$. Determinar o número dos subintervalos para aplicação da fórmula do paralelogramo (trapézio, Simpson) composta para cálculo aproximado da integral $\int_0^1 f(x)dx$ com precisão 0.001.*

Problema 57. *Determinar o menor número dos subintervalos para aplicação da fórmula do paralelogramo (trapézio, Simpson) composta para cálculo aproximado das seguintes integrais com erro que não excede 0.00001:*

$$\begin{aligned} a) \quad & \int_0^1 \frac{dx}{1+x}; \\ b) \quad & \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Problema 58. *Determinar o menor número dos subintervalos para aplicação da fórmula de Simpson composta para cálculo aproximado da integral*

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$$

com erro que não excede 0.001