

Introdução ao Cálculo Numérico 2005

Lista de Exercícios 1

Problema 1. *Seja $Q \in \pi_n$. Provar que $L_n(Q; x) \equiv Q(x)$, quaisquer que sejam os n pontos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$.*

Problema 2. *Se $n \in \mathbb{N}$ e $x_0, x_1, \dots, x_n$ são pontos distintos e $\omega(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$, então*

$$(x - x_1) \cdots (x - x_n) \sum_{k=1}^n \frac{x_k - x_0}{(x - x_k) \omega'(x_k)} = 1.$$

Problema 3. *Construir o polinômio interpolador de Lagrange que satisfaz*

$$p(0) = 1, \quad p(0.5) = 2, \quad p(1) = 3, \quad p(1.5) = 4.$$

Problema 4. *Simplificar a expressão*

$$-\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-2)(x-3) - \frac{3}{2}x(x-1)(x-3) + \frac{2}{3}x(x-1)(x-2).$$

Problema 5. *Provar que para todo $n \in \mathbb{N}$ o polinômio*

$$l(x) = 1 + \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \cdots + \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})}{(x_0 - x_1) \cdots (x_0 - x_n)}$$

satisfaz as condições

$$l(x_0) = 1, \quad l(x_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Problema 6. *Provar que o polinômio de Lagrange que interpola a tabela $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$ pode ser construído através da fórmula de recorrência*

$$\begin{aligned} P_0(x) &= f_0, \\ p_k(x) &= P_{k-1}(x) + [f_k - P_{k-1}(x_k)] \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)}, \end{aligned}$$

onde $\omega_1(x) = x - x_0$, $\omega_{k+1}(x) = (x - x_k)\omega_k(x)$.

Problema 7. *Provar que*

$$\sum_{k=0}^n l_{nk}(x) = 1 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Problema 8. *Provar que*

$$\sum_{k=0}^n x_k^m l_{nk}(x) = x^m, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Problema 9. *Provar que*

$$\sum_{k=0}^n (x - x_k)^m l_{nk}(x) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Problema 10. *Provar que*

$$\sum_{k=0}^n (x - x_k)^{n+1} l_{nk}(x) = (-1)^n \omega(x).$$

Problema 11. *Provar que*

$$\sum_{k=0}^n (x - x_k)^{n+2} l_{nk}(x) = (-1)^n \omega(x) ((n+1)x - x_0 - x_1 - \dots - x_n).$$

Problema 12. *Sejam $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Provar que*

$$\sum_{k=0}^n x_k^{n+1} l_{nk}(0) = (-1)^n x_0 \dots x_n.$$

Problema 13. *Provar que, se $x_0, x_1, \dots, x_n$ são distintos, então*

$$\frac{1}{\omega(x)} = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{x - x_k},$$

onde $A_k = \frac{1}{\omega(x_k)}$, $k = 0, \dots, n$.

Problema 14. *Decompor em soma de frações elementares a função*

$$\frac{x^2 - x - 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}.$$

Problema 15. *Usando a fórmula de Lagrange, provar que, se $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq 0$, então*

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{m}{n} \binom{n}{k} \frac{1}{m-k} = \frac{1}{m-n}.$$

Problema 16. *Provar que, se $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq 1$, então*

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{m}{n} \binom{n}{k} \frac{k}{m-k} = \frac{m}{m-n}.$$

Problema 17. *Sejam $P \in \pi_n$ e $k \in \mathbb{N}$. Provar que, se $P(j)$ são múltiplos de k para $n+1$ valores consecutivos inteiros de j , então $P(j)$ é múltiplo de k para todo valor inteiro de j .*

Problema 18. Provar que, se $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$, então

$$l_{nk}(x) + l_{n,k+1}(x) \geq 1 \quad \text{para } x \in [x_k, x_{k+1}].$$

Problema 19. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $s_0, \dots, s_{n-1}$ números reais e $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Construir o polinômio $P(x)$ de grau $n-1$, que satisfaz

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x) dx = s_i, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Problema 20. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Provar que o coeficiente de x^n do polinômio que interpola a tabela $(x_0, 0), \dots, (x_i, 0), (x_{i+1}, 1), \dots, (x_n, 1)$, é diferente de zero.

Problema 21. Construir explicitamente o polinômio de Lagrange de grau $n-1$ se os nós de interpolação coincidem com os zeros $x_k = \cos((2k-1)\pi/(2n))$, $k = 1, \dots, n$, do polinômio de Chebyshev de primeira espécie $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

Problema 22. Construir explicitamente o polinômio de Lagrange de grau $n-1$ se os nós de interpolação coincidem com os zeros $x_k = \cos(k\pi/(n+1))$, $k = 1, \dots, n$, do polinômio de Chebyshev de segunda espécie

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Problema 23. Seja $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots + a_1x + a_0$ o n -ésimo polinômio de Chebyshev de primeira espécie. Determinar o coeficiente a_1 .

Problema 24. Sejam $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ e $P(x) \in \pi_n$ o polinômio que satisfaz as condições de interpolação

$$P(x_k) = (-1)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Provar que $|L_n(f; x)| \leq |P(x)|$ para todo $x \notin (x_0, x_n)$, se $|f(x_k)| \leq 1$, $k = 0, \dots, n$. Provar que igualdade é atingida somente quando $f(x_k) = P(x_k)$, $k = 0, \dots, n$, ou $f(x_k) = -P(x_k)$, $k = 0, \dots, n$.

Problema 25. Provar que

$$|Q(x)| \leq |T_n(x)| \max_{x \in [-1, 1]} |Q(x)|$$

para todo polinômio $Q \in \pi_n$ e para todo x , $|x| \geq 1$. Aqui

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad \text{para } -1 \leq x \leq 1,$$

isto é, o polinômio de Chebyshev de grau n .

Problema 26. Provar que o problema extremo

$$\min_{-1 \leq x_0 < \dots < x_n \leq 1} \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| : P \in \pi_n, P(x_k) = (-1)^{n-k}, k = 0, \dots, n \right\}$$

possui uma única solução que é $P(x) = T_n(x)$.

Problema 27. Provar que

$$\inf_{-1 \leq x_0 < \dots < x_n \leq 1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{|\omega'(x_k)|} = 2^{n-1}$$

e que este ínfimo é atingido somente para os pontos de extremo do polinômio de Chebyshev $\pm T_n(x)$.

Problema 28. Construir o polinômio de grau n cujo valor no ponto ξ , $|\xi| > 1$, e η e que menos desvia de zero no intervalo $[-1, 1]$.

Problema 29. Seja $P \in \pi_2$. Provar que

$$\max_{x \in [a, b]} |P(x)| \leq \frac{5}{4} \max \{|P(a)|, |P(b)|, |P((a+b)/2)|\}.$$

Problema 30. Seja $f \in C^2[0, 1]$ e $|f''(x)| \leq x^2$ para todo $x \in [0, 1]$. Denotamos por $p_\xi(x)$ a função contínua e linear em cada um dos intervalos $[0, \xi]$ e $[\xi, 1]$ que interpola $f(x)$ nos pontos $0, \xi, 1$. Determinar ξ de tal modo que $|f(x) - p_\xi(x)|$ seja menor que 0.02 em $[0, 1]$.

Problema 31. Seja $P_\xi(x) \in \pi_2$ o polinômio que interpola a função $f(x) = |x|$ nos pontos $-1, \xi, 1$, onde $0 \leq \xi < 1$. Determinar ξ de modo que o erro

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - P_\xi(x)|$$

seja o mínimo possível.

Problema 32. Seja $P_\xi(x) \in \pi_2$ o polinômio que interpola a função $f(x) = |x|$ nos pontos $\pm 1/2, \pm \xi$, onde $0 \leq \xi \leq 1$, $\xi \neq 1/2$. Determinar o erro

$$R(\xi) := \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - P_\xi(x)|$$

e minimizar $R(\xi)$ com respeito a todos os admissíveis ξ . Para qual ξ este mínimo é atingido?

Problema 33. Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\{P_i(x)\}_{i=0}^\infty$ uma sequência de polinômios, todos de grau no máximo n e tais que $|P_i(x)| \leq 1$ para todo $x \in [a, b]$. Usando a fórmula de interpolação de Lagrange, provar que esta sequência possui uma subsequência $\{P_{i_k}(x)\}_{k=0}^\infty$ cujo limite é um polinômio de grau n , isto é, que $P_{i_k}(x) \rightarrow f(x)$, quando $k \rightarrow \infty$, para todo $x \in [a, b]$, onde $f \in \pi_n$.

Problema 34. Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$, para a qual existe um polinômio algébrico de grau n que satisfaz

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| \leq E,$$

onde $E > 0$. Sejam $x_0 < \dots < x_n$ pontos arbitrários de $[a, b]$ e

$$\lambda(x) := \sum_{k=0}^n |l_{nk}(x)|$$

a função de Lebesgue para estes pontos. Provar que

$$|f(x) - L_n(f; x)| \leq (1 + \lambda(x))E, \quad x \in [a, b].$$

Problema 35. Seja $L_n(f; x)$ o polinômio que interpola $f(x) = x/(x+1)$ em $0, 1, \dots, n$. Provar que

$$L_n(f; n+1) = \frac{(-1)^{n+1} + n + 1}{n + 2}.$$

Problema 36. Seja f uma função tal que $f^{(n)}(x)$ é integrável em $[a, b]$. o Provar que, para todo $x \in [a, b]$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt.$$

Esta é a fórmula de Taylor com erro em forma integral.

Problema 37. Provar que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)},$$

onde $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

Problema 38. Provar que, se $F(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, então

$$F[x_0, x_1, \dots, x_n] = \alpha f[x_0, x_1, \dots, x_n] + \beta g[x_0, x_1, \dots, x_n].$$

Problema 39. Provar que, se $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ é qualquer permutação de $0, 1, \dots, n$, então

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}].$$

Problema 40. Provar que

$$\sum_{k=0}^n \frac{x_k^m}{\omega'(x_k)} = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Problema 41. Provar que

$$\sum_{k=0}^n \frac{x_k^n}{\omega'(x_k)} = 1.$$

Problema 42. Seja $f(x) = x^n$. Provar que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 1$$

e

$$f[x_1, x_2, \dots, x_n] = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Problema 43. Sejam $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ e $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Denotamos $f(x) := (x - t_1)(x - t_2) \cdots (x - t_n)$, $g(x) := (x - g_1)(x - g_2) \cdots (x - g_n)$. Provar que

$$\sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{g'(x_k)} = \sum_{i=1}^n (x_i - t_i).$$

Problema 44. Provar que

$$\sum_{k=0}^n \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = 0.$$

Problema 45. Provar que

$$\sum_{k=0}^n x_k \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = n(n+1).$$

Problema 46. Calcular, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, a expressão

$$\sum_{k=0}^n \left\{ 1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} (x - x_k) \right\}.$$

Problema 47. Sejam $x_k \neq 0, 1$, para todo $k = 1, \dots, n$, e $f(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$. Provar que

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^n f(1/x_k)}{(1+x_k)f'(x_k)} = (-1)^{n+1}(1 - x_1 x_2 \cdots x_n).$$

Problema 48. Provar que a diferença dividida é o único funcional linear da forma

$$D(f) = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

que satisfaz

$$D(x^n) = 1 \quad e \quad D(x^k) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Problema 49. Sejam $\{x_k\}_0^n$ números inteiros arbitrários mas distintos. Provar que, se $P(x)$ é um polinômio de grau n com coeficiente 1 de x^n (isto é, $P(x)$ é mônico), então existe um número x_j , $0 \leq j \leq n$, para o qual

$$|P(x_j)| \geq \frac{n!}{2^n}.$$

Problema 50. Sejam $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Provar que, para todo índice $k \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$, existem números positivos A_i , $i = 0, \dots, n-2$, tais que

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_{n-2} = 1 \quad e \quad f[x_0, x_k, x_n] = \sum_{i=0}^{n-2} A_i f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}].$$

Problema 51. (Fórmula de Stefenson) Se $x_0, x_1, \dots, x_n$ são distintos e $f(x) = g(x)h(x)$, prove que

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^n g[x_0, \dots, x_k] h[x_k, \dots, x_n].$$

Problema 52. Calcular $f[x_0, \dots, x_n]$ para $f(x) = 1/x$.

Problema 53. Provar que

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \frac{1}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 54. Sejam $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ e $f \in C^n[x_0, x_n]$. Prove que existe $\xi \in (x_0, x_n)$, tal que

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Problema 55. Provar que, se $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0$ para qualquer escolha de $n+1$ pontos distintos de $[a, b]$, então $f(x)$ coincide com um polinômio algébrico de grau $n-1$, em $[a, b]$.

Problema 56. Seja $p(x)$ o polinômio de grau três que interpola a função $\ln x$ nos pontos 1, 2, 3, 4. Provar que $p(x) > \ln x$ para todo $x \in (2, 3)$.

Problema 57. Seja $p(x)$ um polinômio de grau n que satisfaz a desigualdade $|p(x)| \leq 1$ em $[-1, 1]$. Provar que

$$p[x_0, x_1, \dots, x_n] \leq 2^{n-1}$$

para qualquer escolha dos pontos reais $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Problema 58. Seja $g(x) := f[x_0, x_1, \dots, x_k, x]$. Provar que

$$g[y_0, y_1, \dots, y_n] = f[x_0, x_1, \dots, x_k, y_0, y_1, \dots, y_n].$$

Problema 59. Sejam $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \dots$. Provar que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k, x] = \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}.$$

Problema 60. Se $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \dots$, mostre que, para todo polinômio $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, valem as igualdades:

$$\text{a) } \Delta^n P_0 = a_n n! h^n \quad \text{e} \quad \text{b) } \Delta^m P_0 = a_n n! h^n, \quad m > n.$$

Problema 61. Provar que

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, \dots, n-1, \\ n!, & k = n. \end{cases}$$

Problema 62. Prove que

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \binom{m+j}{k} = 0$$

para todo número natural m e para $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Problema 63. Sejam $f_0, f_1, \dots, f_n$ números dados. Mostrar que

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \Delta^{n-k} f_k = f_0.$$

Problema 64. Seja $P(x)$ um polinômio algébrico para o qual são conhecidos as quantidades $P_n, \Delta P_{n-1}, \dots, \Delta^n P_0$, onde

$$P_k = P(x_k), \quad x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, \dots$$

Mostre que os valores de $P(x)$, para $x = x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$, podem ser calculados através de soma de n termos, cada um sendo uma das quantidades dadas.

Problema 65. Sejam $f_0, f_1, \dots, f_{n+1}$ números dados que satisfazem as condições

$$f_0 = f_{n+1} = 0 \quad \text{e} \quad |\Delta^2 f_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Prove que

$$|f_k| \leq \frac{k(n+1-k)}{2}.$$

Problema 66. *Seja $f_0, f_1, \dots$ uma sequência de números para a qual*

$$\Delta^{n+1}f_i = 0 \quad \text{para todo } i = 0, 1, \dots$$

Prove que existe um polinômio $q(x)$ de grau n para o qual $q(k) = f_k$ para todo $k = 0, 1, \dots$

Problema 67. *Calcular as somas*

- a) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$;
- b) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$;
- c) $1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2$;
- d) $1^3 + 2^3 + \dots + (2n-1)^3$.

Problema 68. *Seja $f(x)$ um polinômio de grau k . Provar que existe polinômio $F(x)$ de grau $k+1$, tal que, para todo n temos*

$$f(1) + f(2) + \dots + f_n = F(n).$$

Problema 69. *Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$ e*

$$\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} f(x_0 + jh) = 0$$

para cada x_0 e $h > 0$, com $[x_0, x_0 + (n+1)h] \subset [a, b]$. Prove que $f(x)$ coincide com um polinômio de grau n em $[a, b]$.