12^{th} International Mathematics Competition for University Students
Blagoevgrad, July 22 - July 28, 2005

Primeiro dia

Problema 1. *Seja A a matriz $n \times n$ cujo elemento (i,j) é $i + j$ para todos $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Qual o posto de A?*

Problema 2. *Para o número natural $n \geq 3$, condidere os conjuntos*

$$S_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad : \quad \forall i \quad x_i \in \{0, 1, 2\}\},$$

$$A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_n \quad : \quad \forall i \leq n - 2 \quad |\{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}| \neq 1\}$$

e

$$B_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_n \quad : \quad \forall i \leq n - 1 \quad (x_i = x_{i+1} \Rightarrow x_i \neq 0)\}.$$

Prove que $|A_{n+1}| = 3 \cdot |B_n|$.
(Por $|A|$ denotamos o número dos elementos do conjunto A.)

Problema 3. *Seja $f \; : \; \mathbb{R} \to [0, \infty)$ uma função continuamente diferenciável. Prove que*

$$\left| \int_0^1 f^3(x)\, dx - f^2(0) \int_0^1 f(x)\, dx \right| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)| \left(\int_0^1 f(x)\, dx \right)^2.$$

Problema 4. *Encontre todos os polinômios $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$ que satisfazem as duas condições :*

(i) *$(a_0, a_1, \ldots a_n)$ é uma permutação dos números $(0, 1, \ldots, n)$;*
(ii) *todos os zeros de $P(x)$ são números racionais.*

Problema 5. *Seja $f \; : \; (0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferenciável tal que*

$$|f''(x) + 2xf'(x) + (x^2 + 1) f(x)| \leq 1$$

para todos os x. Prove que $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Problema 6. *Dado um grupo G, denote por $G(m)$ o subgrupo gerado pelas m-ésimas potências dos elementos de G. Se $G(m)$ e $G(n)$ são comutativos, prove que $G(mdc(m, n))$ é comutativo também.*
(Por $mdc(m, n)$ denotamos o maior divisor comum de m e n.)

Segundo dia

Problema 7. *Seja $f(x) = x^2 + bx + c$, onde b e c são números reais, e*

$$M = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |f(x)| < 1\}.$$

Obviamente, ou M é vazio, ou consiste de intervalos abertos disjuntos. Denote por $|M|$ a soma dos seus comprimentos. Prove que

$$|M| \leq 2\sqrt{2}.$$

Problema 8. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $(f(x))^n$ é polinômio para $n = 2, 3, \ldots$. Podemos concluir que f é um polinômio?*

Problema 9. *No espaço linear das matrizes reais $n \times n$, determine a maior possível dimensão de um subespaço V, tal que*

$$\forall \ X, Y \in V \qquad tr(XY) = 0.$$

(O traço $tr(A)$ de uma matriz A é a soma dos seus elementos diagonais.)

Problema 10. *Prove que, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é três vezes continuamente diferenciável, então existe um número real $\xi \in (-1, 1)$, tal que*

$$\frac{f'''(\xi)}{6} = \frac{f(1) - f(-1)}{2} - f'(0).$$

Problema 11. *Encontre todos os $r > 0$, tais que, sempre quando $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, tal que $|grad\ f(0,0)| = 1$ e $|grad\ f(u) - grad\ f(v)| \leq |u - v|$ para todos $u, v \in \mathbb{R}^2$, então o máximo de f no disco $\{u \in \mathbb{R}^2 \ : \ |u| \leq r\}$ é atingido em exatamente um ponto.*
(grad $f(u) = (\partial_1 f(u), \partial_2 f(u))$ é o vetor-gradiente de f no ponto u. Para um vetor $u = (a, b)$, $|u| = \sqrt{a^2 + b^2}$.)

Problema 12. *Prove que, se p e q são números racionais e $r = p + q\sqrt{7}$, então existe uma matriz*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com elementos inteiros que satisfazem $ad - bc = 1$, tal que

$$\frac{ar + b}{cr + d} = r.$$