Curso de Verão 2006

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada
DCCE - Departamento de Ciência da Computação e Estatística

Universidade Estadual Paulista - UNESP
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - IBILCE
Câmpus de São José do Rio Preto - SP

Exemplos para o curso de Cálculo Avançado

Elaboração:

Vanessa Gonçalves Pereira Paschoa

Yen Chi Lun

Coordenação:

Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov (DCCE/IBILCE/UNESP)

Exercícios extraídos de
B. Demidovich,
Problemas y Ejercicios de Analisis Matematico,
Editorial MIR, Moscou, 1973.

411. Encontrar a derivada da função $f(y) = (2a+3by)^2$.

Solução:

Nesse caso

$$f(y) = u^2, \quad \text{onde } \; u = 2a + 3by$$

Temos que

$$(u^2)'_u = 2u \quad \text{e} \;\; u'_y = 3b.$$

Logo

$$\begin{aligned} f'(y) &= 2u \cdot 3b \\ &= 2(2a+3by)3b \\ &= 12ab + 18b^2 y \end{aligned}$$

---

415. Encontrar a derivada de $y = \sqrt[3]{a+bx^3}$.

Solução:

Temos

$$y = \sqrt[3]{u}, \quad \text{onde } u = a + bx^3$$

Sabemos que

$$y' = (\sqrt[3]{u})'_u \cdot u'_x$$

Temos que

$$(\sqrt[3]{u})'_u = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \quad \text{e} \;\; u'_x = 3bx^2.$$

Logo

$$y' = \frac{bx^2}{\sqrt[3]{(a+bx^3)^2}}$$

---

417. Encontrar a derivada de $y = (3 - 2\sin x)^5$.

Solução:

Tomando

$$3 - 2\sin x = u,$$

então

$$y = u^5.$$

Temos que,

$$y'_u = 5u^4 \quad \text{e} \quad u'_x = -2\cos x$$

Logo,

$$\begin{aligned} y' &= y'_u \cdot u'_x \\ &= 5u^4 \cdot -2\cos x \\ &= 5(3 - 2\sin x)^4(-2\cos x) \\ &= -10\cos x(3 - 2\sin x)^4 \end{aligned}$$

---

433. Encontrar a derivada da função $f(x) = \cos(\alpha x + \beta)$.

Solução:

Tomando

$$\alpha x + \beta = u = u(x),$$

temos que

$$f'(x) = (\cos u)' \cdot u'$$

Como $u' = \alpha$ então,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha \cdot (-\sin u) \\ &= -\alpha \cdot \sin(\alpha x + \beta) \end{aligned}$$

---

572. Encontrar a derivada de $y = x^x$.

Solução:

Sabemos que (*), se

$$y = u^v$$

então

$$y' = u^v(v' \ln u + \frac{u'}{u} \cdot v).$$

No nosso caso $u(x) = x$ e $v(x) = x$.
Assim, $u' = 1$ e $v' = 1$.

Então,

$$\begin{aligned} y' &= x^x(1\ln x + \frac{1}{x}\cdot x) \\ &= x^x(\ln x + 1) \end{aligned}$$

(*) Para $y = u^v$ temos que $\ln y = v \ln u$. Derivando ambos os lados em relação a x temos

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + \frac{u'}{u} v.$$

Logo

$$y' = u^v (v' \ln u + \frac{u'}{u} v).$$

---

573. Encontrar a derivada da função $y = x^{x^2}$.

Solução:

Sabemos que, se

$$y = u^v$$

então

$$y' = u^v(v' \ln u + \frac{u'}{u} \cdot v).$$

No nosso caso $u(x) = x$ e $v(x) = x^2$.
Assim, $u' = 1$ e $v' = 2x$.
Então ,

$$\begin{aligned} y' &= x^{x^2}(2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x^2) \\ &= x^{x^2}(2x \cdot \ln x + x) \\ &= x^{x^2+1}(2 \cdot \ln x + 1) \end{aligned}$$

---

579. Encontrar a derivada de $y = (1 + \frac{1}{x})^x$.

Solução:

Sabemos que, se

$$y = u^v$$

então

$$y' = u^v(v' \ln u + \frac{u'}{u} \cdot v).$$

Nesse caso $u(x) = 1 + \frac{1}{x}$ e $v(x) = x.$
Assim,

$$u' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{e} \quad v' = 1.$$

Então,

$$\begin{aligned} y' &= \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left(1 \cdot \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x^2(1+\frac{1}{x})} \cdot x\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left(\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}\right) \end{aligned}$$

---

581. Encontrar a derivada x'_y das seguintes funções :

a)$y = 3x + x^2$
b)$y = x - \frac{1}{2} \cdot \sin x$
c)$y = 0.1 \cdot x + e^{\frac{x}{2}}$

Solução:

a) Desde que

$$y'_x = 2x + 3,$$

então,

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

Logo

$$x'_y = \frac{1}{3+2x} \qquad (1)$$

Observe que

$$y = 3x + x^2 = x^2 + 3x + \frac{3}{2}^2 - \frac{3}{2}^2 = (x+\frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2$$

Assim,

$$y = (x+\frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 \quad \Rightarrow \quad \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 = y + \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{y+\frac{9}{4}}$$

Substituindo em (1) temos

$$x'_y = \frac{1}{3+2(-\frac{3}{2} \pm \sqrt{y+\frac{9}{4}})}.$$

---

b) $y = x - \frac{1}{2} \cdot \sin x$

$$y'_x = 1 - \frac{1}{2}\cos x,$$

então,

$$\begin{aligned} x'_y &= \frac{1}{y'_x} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos x} \\ &= \frac{2}{2-\cos x} \end{aligned}$$

---

c) $y = 0.1 \cdot x + e^{\frac{x}{2}}$

$$y'_x = 0.1 + \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$$

então,

$$\begin{aligned} x'_y &= \frac{1}{y'_x} \\ &= \frac{1}{0.1+\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}} \\ &= \frac{10}{1+20 \cdot e^{\frac{x}{2}}} \end{aligned}$$

---

582. Encontrar a derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ da função parametrizada

$$\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3. \end{cases}$$

Solução:

Sabemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Neste exemplo

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2 \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dt} = 2.$$

Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\, t^2.$$

---

585. Encontrar a derivada y'_x da função

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$$

Solução:

Temos que

$$x'_t = \frac{3a \cdot (1+t^3) - 9at^3}{(1+t^3)^2} \quad \text{e} \quad y'_t = \frac{6at \cdot (1+t^3) - 9at^4}{(1+t^3)^2}$$

Então,

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t} \\ &= \frac{6at(1+t^3) - 9at^4}{3a(1+t^3) - 9at^3} \\ &= \frac{6at - 3at^4}{3a - 6at^3} \\ &= \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}. \end{aligned}$$

---

623. Com qual ângulo a curva $y = \tan x$ intercepta o eixo das abcissas na origem?

Solução:

O ângulo θ que a curva faz com o eixo das abcissas na origem é tal que

$$\tan\theta = y'_0,$$

onde y'_0 é o valor da derivada da função no ponto da origem.

Temos que

$$y' = \sec^2 x.$$

Na origem

$$y'_0 = \sec^2 0 = 1.$$

Portanto,

$$\tan\theta = 1$$
$$\theta = \arctan 1$$
$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

---

625. Encontre os pontos nos quais as retas tangentes à curva $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ são paralelas ao eixo x.

Solução:

Precisamos encontrar os pontos nos quais $y' = 0$.

Sabendo que

$$y' = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x-1)(x+2)$$

então

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\; ou \;\; x = 1 \;\; ou \;\; x = -2.$$

Logo os pontos são (0,20), (1,15) e (-2,-12).

---

630. Escreva a equação da reta tangente e da normal para a parábola $y = \sqrt{x}$ no ponto de abcissa $x = 4$.

Solução:

Lembrando:

Equação da tangente: $y - y_0 = y'_0(x - x_0)$

Equação da normal: $x - x_0 + y'_0(y - y_0) = 0.$

Nesse exemplo $x_0 = 4$ e $y_0 = \sqrt{4} = 2$.
Além disso,

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y'_0 = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Portanto, a equação da tangente é

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4), \quad \text{ou seja,} \quad y = \frac{1}{4}\, x + 1$$

e a equação da normal é

$$x - 4 + \frac{1}{4}(y - 2) = 0, \quad \text{ou seja,} \quad y = -4x + 18.$$

---

719. Usando a derivada, encontre a diferencial da função

$$y = \cos x \;\text{ para }\; x = \frac{\pi}{6} \;\text{ e }\; \Delta x = \frac{\pi}{36}.$$

Solução:

$$dy = y' \cdot \Delta x$$

Temos que

$$y' = -\sin x.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} dy &= -\sin x \cdot \Delta x \\ &= -(\sin \frac{\pi}{6}) \cdot \frac{\pi}{36} \\ &= \frac{-1}{2} \cdot \frac{\pi}{36} \\ &= -\frac{\pi}{72}. \end{aligned}$$

---

722. Encontre a diferencial de $y = \frac{1}{x^m}$ para valores arbitrários do argumento e de incremento.

Solução:

$$y' = -m\frac{1}{x^{m+1}}$$

Como $dy = y'dx$ então

$$dy = \frac{-m\ dx}{x^{m+1}}$$

---

732. Econtrar a diferencial da função: $(x+y)^2 \cdot (2x+y)^3 = 1$.

Solução:

Na forma diferencial temos

$$2(x+y)(dx+dy)(2x+y)^3 + (x+y)^2 3(2x+y)^2 = 0$$

ou seja,

$$(x+y)(2x+y)^2[2(2x+y)(dx+dy) + 3(x+y)(2dx+dy)] = 0$$

Obviamente $y \neq -x$ e $y \neq -2x$, portanto podemos simplificar

$$2(2x+y)(dx+dy) + 3(x+y)(2dx+dy) = 0$$

Daí

$$dx[2(2x+y) + 6(x+y)] + dy[2(2x+y) + 3(x+y)] = 0$$

Portanto,

$$dy = \frac{-(10x+8y)dx}{7x+5y}$$

---

756. Mostre que a função $f(x) = x - x^3$ no intervalo $-1 \leq x \leq 0$ e $0 \leq x \leq 1$ satisfaz o Teorema de Rolle e encontre o valor apropriado para ξ.

Solução:

As funções $f(x) = x - x^3$ e $f'(x) = 1 - 3x^2$ são polinomiais, portanto são contínuas em toda reta real.

Além disso,

$$f(-1) = 0 = f(0) \quad \text{e} \quad f(0) = 0 = f(1).$$

Essas condições satisfazem o Teorema de Rolle, sendo assim, existe pelo menos um ξ_1 no intervalo $]-1,0[$ e pelo menos um ξ_2 no intervalo $]0,1[$ tal que

$$f'(\xi_1) = 0 \quad \text{e} \quad f'(\xi_2) = 0.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 1 - 3x^2 &= 0 \\ x &= \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\xi_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \quad \text{e} \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

---

759. Seja $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$. Mostre que a equação $f'(x) = 0$ possui três raízes reais.

Solução:

Temos que

$$f(0) = f(-1)$$
$$f(-1) = f(-2)$$
$$f(-2) = f(-3)$$

e $f(x)$ e $f'(x)$ são funções contínuas, então, pelo Teorema de Rolle, existem $\xi_1 \in (-3,-2)$, $\xi_2 \in (-2,-1)$ *e* $\xi_3 \in (-1,0)$ tais que $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0$, ou seja, ξ_1, ξ_2 *e* ξ_3 são raízes de $f'(x)$.

---

763. Seja um segmento da parábola $y = x^2$ entre os pontos $A(1,1)$ e $B(3,9)$, encontre um ponto nesse segmento no qual a reta tangente à curva é paralela à corda AB.

Solução:

As funções $f(x) = x^2$ e $f'(x) = 2x$ são contínuas no intervalo. Então pelo Teorema de Lagrange sabemos que existe ξ, $1 \leq \xi \leq 3$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

A inclinação da corda AB é $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}$, portanto ξ é a abcissa de um ponto no qual a reta tangente é paralela à corda AB.

$$f'(\xi) = \frac{9 - 1}{3 - 1}$$
$$2\xi = 4$$
$$\xi = 2$$

O ponto é (2,4).

---

765. a) Para as funções $f(x) = x^2 + 2$ e $F(x) = x^3 - 1$ teste se o Teorema de Cauchy vale no intervalo [1,2] e encontre ξ;

b) faça o mesmo com as funções $f(x) = \sin x$ e $F(x) = \cos x$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Solução:

a) Temos que $f(x)$ e $F(x)$ são contínuas, $f'(x) = 2x$ e $F'(x) = 3x^2$ não simultaneamente nulas no intervalo [1,2] e $F(2) \neq F(1)$, logo pelo Teorema de Cauchy, existe um $\xi \in [1,2]$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

Sabendo que $f'(x) = 2x$ e $F'(x) = 3x^2$, temos

$$\frac{f(2) - f(1)}{F(2) - F(1)} = \frac{2\xi}{3\xi^2}$$

$$\frac{4}{7} = \frac{2}{3\xi}$$

ou seja,

$$\xi = \frac{7}{6}.$$

b)Temos que as funções $f(x) = \sin x$ e $F(x) = \cos x$ também são contínuas e suas derivadas $f'(x) = \cos x$ e $F'(x) = -\sin x$ não são simultaneamente nulas, e além disso $F(\frac{\pi}{2}) \neq F(0)$, então são satisfeitas as condições do Teorema de Cauchy, dáí segue que .

$$\begin{aligned}
\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} &= \frac{f(\frac{\pi}{2}) - f(0)}{F(\frac{\pi}{2}) - F(0)} \\
\frac{\cos \xi}{-\sin \xi} &= \frac{\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin 0}{\cos(\frac{\pi}{2}) - \cos 0} \\
-\cot \xi &= -1 \\
\cot \xi &= 1
\end{aligned}$$

Logo, concluímos que $\xi = \frac{\pi}{4}$.

---

766. Expanda o polinômio $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ em potências de $(x - 2)$.

Solução:

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$
$f''(x) = 6x - 4$
$f'''(x) = 6$
$f^{(n)}(x) = 0$

$f(2) = 11$
$f'(2) = 7$
$f''(2) = 8$
$f'''(2) = 6$

Então,

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 5 \;=\; 11 + (x-2)\cdot 7 + \frac{(x-2)^2}{2!}\cdot 8 + \frac{(x-2)^3}{3!}\cdot 6$$

ou

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 5 \;=\; 11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3$$

---

768. Expanda a função $f(x) = \ln x$ em potências de (x-1) até $(x-1)^2$

Solução:

Temos que

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{x^2}, \quad \text{e} \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + f^{(2)}(1)\frac{(x-1)^2}{2!} + f^{(3)}(\xi)\frac{(x-1)^3}{3!} \\ &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3\xi^3}, \end{aligned}$$

onde $\xi = 1 + \theta(x-1);\ 0 < \theta < 1$.

---

770. Expanda a função $f(x) = e^x$ em potências de x até o termo x^{n-1}.

Solução:

$$f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$e^x|_{x=0} = 1$$

Temos então,

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!}\cdot 1 + \frac{x^2}{2!}\cdot 1 + \frac{x^3}{3!}\cdot 1 + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot 1 + \frac{x^n}{n!}\cdot e^{\xi} \\ &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}\cdot e^{\xi} \end{aligned}$$

onde $\xi = \theta x;\ 0 < \theta < 1$.

---

773. Encontre o erro da fórmula $e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$.

Solução:

Sabemos que (fórmula de Mac'Laurin)

$$e^x = e^0 + e^0(x-0) + e^0\frac{(x-0)^2}{2!} + e^0\frac{(x-0)^3}{3!} + e^0\frac{(x-0)^4}{4!} + e^{\xi}\frac{(x-0)^5}{5!},$$

onde $\xi = \theta x;\ 0 < \theta < 1$.

Então

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{e^{\xi}}{5!},$$

onde $\xi = \theta;\ 0 < \theta < 1$.

Logo o erro é

$$\frac{e^{\xi}}{5!} < \frac{e^1}{5!} < \frac{3}{120} = \frac{1}{40}$$

---

777. Calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$$

Solução:

$$\lim_{x\to 0}(x\cos x - \sin x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} x^3 = 0.$$

Temos uma indeterminação $\frac{0}{0}$. Usando a Regra de L'Hospital-Bernoulli temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{3x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{3x}\end{aligned}$$

Novamente aparece uma indeterminação, podemos aplicar a Regra de L'Hospital-Bernoulli novamente e obter

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{3} = -\frac{1}{3}$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = -\frac{1}{3}$$

---

778. Calcule

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$$

Solução:

Pela regra de L'Hospital, temos

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1}\frac{-1}{\frac{-\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}} = \infty$$

---

782. Calcule

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 5x}$$

Solução:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan 5x = \infty.$$

Temos uma indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$. Usando a Regra de L'Hospital-Bernoulli duas vezes temos

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 5x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{5\sec^2 5x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 5x}{5\cos^2 x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cdot\cos 5x\cdot -\sin 5x\cdot 5}{5\cdot 2\cdot\cos x\cdot -\sin x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x\cdot\sin 5x}{\cos x\cdot\sin x}
\end{aligned}
$$

Novamente aparece uma indeterminação $\left(\frac{0}{0}\right)$, podemos aplicar a Regra de L'Hospital-Bernoulli novamente e obter

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x\cdot\sin 5x}{\cos x\cdot\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 5\,\frac{\cos^2 5x-\sin^2 5x}{\cos^2 x-\sin^2 x} = 5$$

Logo,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 5x} = 5$$

---

787. Calcule $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot\cot x$

Solução:

Temos que

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot\cot x = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot\cos x}{\sin x}$$

Pela regra de L'Hospital, temos

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(2\cos x-1)}{\cos x} = 0$$

---

790. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} x^n\cdot e^{-x},\quad n>0$

Solução:

Temos que

$$\lim_{x\to 0} x^n\cdot e^{-x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^n}{e^x} = 0.$$

---

797. Calcule

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\cot x}\ -\ \frac{\pi}{2\cos x}\right)$$

Solução:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\cot x}\ -\ \frac{\pi}{2\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ \frac{x\sin x-\pi/2}{\cos x}$$

Temos uma indeterminação $\frac{0}{0}$. Usando a Regra de L'Hospital-Bernoulli temos

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ \frac{x\sin x-\pi/2}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ \frac{\sin x+x\cos x}{-\sin x}=-1$$

---

811. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função $y = 1 - 4x - x^2$

Solução:

Desde que,

$$y' = -4 - 2x,$$

então

$$y' = 0 \ \Leftrightarrow\ x = -2$$

Além disso,

$$y'(0) = -4.$$

Pela continuidade da função y' e por (-2,0) ser o único ponto onde $y' = 0$, e sabendo que $y'(0) = -4$, concluímos que

$$y' < 0,\quad \textit{quando } x > -2$$

$$y' > 0,\quad \textit{quando } x < -2$$

Ou seja, a função é crescente em $]-\infty,-2[$ e decresnte em $]-2,+\infty[$.

---

831. Encontre os pontos críticos, máximo e mínimo da função $y = x(x-1)^2(x-2)^3$.

Solução:

Temos que

$$
\begin{aligned}
y' &= (x-1)^2(x-2)^3 + x[2(x-1)(x-2)^3 + 3(x-1)^2(x-2)^2] \\
&= (x-1)(x-2)^2[(x-1)(x-2) + 2x(x-2) + 3x(x-1)] \\
&= (x-1)(x-2)^2(6x^2 - 10x + 2) \\
&= (x-1)(x-2)^2(x - \frac{5+\sqrt{13}}{6})(x - \frac{5-\sqrt{13}}{6})
\end{aligned}
$$

Os pontos críticos da função têm abcissas $x = 1$, $x = 2$, $x = \frac{5+\sqrt{13}}{6}$ e $\frac{5-\sqrt{13}}{6}$.

$$y'(0) < 0$$

Análise do sinal:

x		$\frac{5-\sqrt{13}}{6}$		1		$\frac{5+\sqrt{13}}{6}$		2	
y'	-	0	+	0	-	0	+	$0^{(3)}$	+
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

$0^{(3)}$: multiplicidade 3

Logo, $x = \frac{5-\sqrt{13}}{6}$ e $x = \frac{5+\sqrt{13}}{6}$ são as abcissas dos pontos de mínimo local e $x = 1$ do ponto de máximo local.

---

843. Determine os extremos da função $y = x\ln^2 x$

Solução:
Domínio: $D_y = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$
Desde que,

$$y' = \ln^2 x + x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln^2 x + 2\ln x,$$

então

$$
\begin{aligned}
y' = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln^2 x + 2\ln x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \ln x(\ln x + 2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \ln x = 0 \ \text{ ou } \ \ln x = -2 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 1 \ \text{ ou } \ x = e^{-2}
\end{aligned}
$$

Análise do sinal de y':

x	$0 < x < e^{-2}$	e^{-2}	$e^{-2} < x < 1$	1	$x > 1$
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

O ponto de máximo local é $\left(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e^2}\right)$ e o ponto de mínimo é $(1, 0)$.

O ponto $(1/e^2, 4/e^2)$ não é máximo global porque

$$\lim_{x\to+\infty}(x\ln^2 x) = +\infty.$$

O ponto $(1, 0)$ é de fato o mínimo global da função porque

$$x > 0 \ \text{ e } \ \ln^2 x > 0 \ \text{ ou seja, } \ y = x\ln^2 x > 0.$$

---

846. Encontre os pontos críticos, máximo e mínimo da função $y = x^2 e^{-x}$.

Solução:

Temos que

$$y' = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (-e^{-x}) = x \cdot e^{-x} \cdot (2 - x).$$

e

$$y'' = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x} = e^{-x}(x^2 - 4x + 2).$$

Como y'=0 se, e somente se, $x = 0$ ou $x = 2$, então $(0, 0)$ e $(2, 4/e^2)$ são pontos críticos da função.

Como

$$y''(0) = e^{-0}(0^2 - 4 \cdot 0 + 2) = 2 > 0,$$

então $(0, 0)$ é o ponto mínimo local.

Como

$$y''(2) = e^{-2}(2 - 4 \cdot 2 + 2^2) < 0,$$

então $(2, 4/e^2)$ é o ponto máximo local.

---

849. Determine o menor e maior valor da função

$$y = \frac{x}{1 + x^2}$$

Solução:

Desde que

$$y' = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2},$$

$$y' = 0 \ \Leftrightarrow \ 1 - x^2 = 0.$$

Os pontos críticos são $(1, 1/2)$ e $(-1, -1/2)$.

Análise do sinal de y':

	$x<-1$	-1	$-1<x<1$	1	$x>1$
y'	-	0	+	0	-
y	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$

Além disso,

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} = \frac{1}{2x} = 0.$$

Portanto o menor valor que a função atinge é $-1/2$ quando $x=-1$ e o maior valor é $1/2$ quando $x=1$.

---

854. Encontre o maior e o menor valor da função

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1,$$

nos intervalos [-1,5] e [-10,12].

Solução:

Sabemos que

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x-1)(x+2)$$

e

$$y'' = 12x + 6 = 6(2x+1).$$

Como

$$y' > 0 \text{ para } x \in (-\infty,-2] \cup [1,\infty),$$

então y é estritamente crescente em $(-\infty,-2] \cup [1,\infty)$.

Como

$$y' < 0 \text{ para } x \in [-2,1],$$

então y é estritamente decrescente em $x \in [-2,1]$.

Temos que $x=-2$ e $x=1$ são pontos críticos de y. Como $y''(-2) = -18 < 0$ então $x=-2$ é ponto de máximo local e como $y''(1) = 18 > 0$ então $x=1$ é ponto de mínimo local.

No intervalo [-1,5]:

$$\begin{aligned} y(-1) &= 14 \\ y(1) &= -6 \\ y(5) &= 266 \end{aligned}$$

Portanto -6 é o menor valor e 266 o maior valor no intervalo[-1,5].

No intervalo [-10,12]:

$$\begin{aligned} y(-10) &= -1579 \\ y(-2) &= -18 \\ y(1) &= -6 \\ y(12) &= 3745 \end{aligned}$$

Portanto -1579 é o menor valor e 3745 o maior valor no intervalo[-10,12].

---

858. Prove a seguinte desigualdade para $x > 0$

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$$

Solução:

Primeiro vamos mostrar que $\sin x < x$.

Seja

$$f(x) = \sin x - x.$$

Temos que

$$f'(x) = \cos x - 1 \leq 0.$$

Portanto, $f(x)$ é uma função decrescente.

Além disso,

$$f(0) = 0.$$

Então, quando $x > 0$

$$f(x) = \sin x - x < 0,$$

ou seja,

$$\sin x < x.$$

Agora provemos que $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$.

Seja

$$g(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x.$$

Temos que

$$g'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x.$$

Quando $x > 0$, $g'(x)$ é negativa. De fato, pois $g''(x) = -x + \sin x = f(x)$ que é negativa quando $x > 0$, isto implica que $g'(x)$ é decrescente e como $g'(0) = 0$ concluimos que $g'(x)$ é negativa.

Sendo assim, $g(x)$ é decrescente para $x > 0$.

Além disso,

$$g(0) = 0.$$

Logo, quando $x > 0$

$$g(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x < 0,$$

ou seja,

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x.$$

Portanto,

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$$

---

933. Faça o gráfico de $y = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}$, encontre o domínio, pontos extremos, intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de inflexão e direção de concavidade.

Solução:
Domínio:

$$x \in D_y \;\Leftrightarrow\; 8 + x \geq 0 \;\text{ e }\; 8 - x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; -8 \leq x \leq 8$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{8+x}} + \frac{1}{2\sqrt{8-x}}$$

Note que $y' > 0$, logo y é estritamente crescente. Então os pontos extremos são (-8,-4) o mínimo e (8,4) o máximo.

$$y'' = \frac{1}{4}\Big(-\frac{1}{\sqrt{(8+x)^3}} + \frac{1}{\sqrt{(8-x)^3}}\Big)$$

$$y'' = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$$

$$y''|_{x=-1} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{\sqrt{9^3}} - \frac{1}{\sqrt{7^3}}\Big) < 0$$

e

$$y''|_{x=1} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{\sqrt{7^3}} - \frac{1}{\sqrt{9^3}}\Big) > 0$$

Portanto, quando $x < 0$ a função é côncava e quando $x > 0$ é convexa. Ou seja, o ponto $(0,0)$ é de inflexão.

---

953. Faça o gráfico de $y = \frac{x}{\ln x}$, encontre o domínio, pontos extremos, intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de inflexão, direção de concavidade e assíntotas.

Solução: Domínio:

$$D_y = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\}$$

Há uma assíntota vertical $x = 1$, pois nas proximidades desta reta a função se comporta da seguinte forma:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\ln x} = +\infty$$

$$y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

$$y' = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = e$$

Observe que

$$sign(y') = sign(\ln x - 1).$$

Logo,

$$y' < 0 \;\Leftrightarrow\; x < e$$
$$y' > 0 \;\Leftrightarrow\; x > e.$$

Concluímos que y é decrescente quando $x < e$, crescente quando $x > e$ e que (e, e) é ponto de mínimo local.

$$y'' = \frac{\frac{1}{x}\ln^2 x - (\ln x - 1)2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln^2 x)^2}$$
$$y'' = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln^2 x - 2\ln^2 x + 2\ln x}{(\ln^2 x)^2}$$
$$y'' = \frac{2 - \ln x}{x(\ln^3 x)}$$

$$y'' = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow\; x = e^2$$

Se $0 < x < 1$ então $\ln x < 0$, ou seja, $2 - \ln x > 0$. Portanto,

$$y'' = \frac{2 - \ln x}{x(\ln^3 x)} < 0$$

Se $1 < x < e^2$ então $0 < \ln x < 2$, ou seja, $2 - \ln x > 0$. Portanto,

$$y'' = \frac{2 - \ln x}{x(\ln^3 x)} > 0$$

Se $e^2 < x$ então $\ln x > 2$, ou seja, $2 - \ln x < 0$. Portanto

$$y'' = \frac{2 - \ln x}{x(\ln^3 x)} < 0$$

Isto significa que quando $x < 1$ a função é côncava, quando $1 < x < e^2$ é convexa e quando $x > e^2$ a função é côncava. O ponto $(e^2, \frac{e^2}{2})$ é ponto de inflexão.

Não há assíntota horizontal/inclinanda, pois

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x/\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

e

$$b = \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1/x} = +\infty$$

. Encontre as assíntotas da função

$$y = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Solução:

$$D_y = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

Portanto existe uma assíntota vertical $x = 2$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{(x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x(x-2)^2} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0$$

Portanto existe assíntota horizontal $y = 0$ quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$.

. Encontre as assíntotas da função

$$y = \frac{x^3}{x^2+1}$$

Solução:

$$D_y = \mathbb{R}$$

Portanto não existe uma assíntota vertical.

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3/(x^2+1)}{x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x\to\infty} y - x \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2+1} - x \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x^2+1} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto existe assíntota inclinada $y = x$ quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$.

Índice de Integrais Indefinidas Resolvidas

1033. $\int x(x+a)(x+b)\ dx.$

1041. $\int \frac{(x^m-x^n)^2}{\sqrt{x}}dx.$

1048. $a) \int \tan^2 x\ dx, \quad b) \int \tanh^2 x\ dx.$

1051. $\int \frac{a}{a-x}dx.$

1063. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

1191.

a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}, \quad x=\frac{1}{t},$

b) $\int \frac{dx}{e^x+1}, \quad x=-\ln t,$

d) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}, \quad t=\sqrt{x+1}$

e) $\int \frac{\cos x\ dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}, \quad t=\sin x$

1193. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$

1197. $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

1201. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

1203. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$

1204. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

1211. $\int \ln x\ dx$

1213. $\int \arcsin x\ dx$

1216. $\int \frac{x}{e^x}dx$

1221. $\int x \sin x\ \cos x\ dx$

1255. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

1256. $\int \frac{dx}{x^2+2x}$

1259. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5} dx$

1260. $\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4} dx$

1262. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$

1263. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

1266. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} dx$

1268. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

1276. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 12} dx$

1278. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1}} dx$

1281. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\ dx$

1284. $\int \frac{5x^2+2}{x^3-5x^2+4x} dx$

1285. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

1288. $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} dx$

1291. $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)} dx$

1315. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} dx$

1317. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

1323. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$

1326. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$

1328. $\int \frac{x^6dx}{\sqrt{1+x^2}}$

1332. $\int x^3(1+2x^2)^{\frac{-3}{2}}dx$

1334. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

1339. $\int \sin^5 xdx$

1342. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx$

1345. $\int \sin^3 x \cos^4 xdx$

1347. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$

1351. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x}$

1352. $\int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}}$

1356. $\int \tan^2(5x)dx$

1357. $\int \cot^3 x \ dx$

1365. $\int \sin(3x)\cos(5x)dx$

1366. $\int \sin(10x)\sin(15x)dx$

1367. $\int \cos(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{3})dx$

1371. $\int \cos(x)\cos^2(3x)dx$

1373. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}dx$

1375. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$

1377. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}dx$

1379. $\int \frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx$

1381. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$

1383. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x}$

1403. $\int \sqrt{3-2x-x^2}dx$

1404. $\int \sqrt{2+x^2}dx$

1405. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}dx$

1406. $\int \sqrt{x^2-2x+2}dx$

1407. $\int \sqrt{x^2-4}dx$

1408. $\int \sqrt{x^2+x}dx$

1415. $\int (x^2+1)^2 e^{2x}dx$

1416. $\int x^2\cos^2(3x)\ dx$

1417. $\int x\sin x\cos 2x\ dx$

1427. Deduza a fórmula de recorreência para a integral $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}dx$ e calcule para $n=2$ e $n=3$.

1430. Deduza a fórmula de recorreência para a integral $I_n = \int x^n \cdot e^{-x}dx$ e calcule para n=10.

SOLUÇÕES

1033. Calcule a integral

$$\int x(x+a)(x+b)\ dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}\int x(x+a)(x+b)\ dx. &= \int \left\{x^3+(a+b)x^2+abx\right\} dx\\ &= \frac{x^4}{4}+\frac{(a+b)x^3}{3}+\frac{abx^2}{2}+C.\end{aligned}$$

1041. Calcule a integral

$$\int \frac{(x^m-x^n)^2}{\sqrt{x}} dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}I=\int \frac{(x^m-x^n)^2}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{(x^m-x^n)^2}{x^{\frac{1}{2}}} dx\\ &= \int \frac{x^{2m}-2x^{m+n}+x^{2n}}{x^{\frac{1}{2}}} dx\\ &= \int \left\{x^{(2m-\frac{1}{2})}-2x^{(m+n-\frac{1}{2})}+x^{(2n-\frac{1}{2})}\right\} dx\end{aligned}$$

Se $m,n\neq -\frac{1}{4}$ e $m+n\neq -\frac{1}{2}$ então

$$I=\frac{x^{(2m+\frac{1}{2})}}{2m+\frac{1}{2}}-\frac{2x^{(m+n+\frac{1}{2})}}{m+n+\frac{1}{2}}+\frac{x^{(2n+\frac{1}{2})}}{2n+\frac{1}{2}}+C.$$

Se $m=-\frac{1}{4}$ ou $n=-\frac{1}{4}$ ou $m+n\neq -\frac{1}{2}$ use

$$\int x^{-1}dx=\ln x$$

1048. Calcule as integrais

$$a) \int \tan^2 x \;\, dx \quad , \quad b) \int \tanh^2 x \;\, dx.$$

Solução:

a)

$$\begin{aligned} \int \tan^2 x \; dx &= \int \left\{ \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right\} dx \\ &= \tan x - x + C. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int \tanh^2 x dx &= \int \left\{ 1 - \frac{1}{\cosh^2 x} \right\} dx \\ &= x - \tanh x + C. \end{aligned}$$

Observação:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad , \quad \tanh(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}.$$

1051. Calcule a integral

$$\int \frac{a}{a-x} dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}\int \frac{a}{a-x}dx &= -a\int \frac{1}{a-x}d(-x+a)\\ &= -a\ln|a-x|+C\\ &= \ln|a-x|^{-a}+C.\end{aligned}$$

1063. Calcule a integral

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \frac{1}{2}\cdot\int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\int \frac{du}{\sqrt{u}}\\ &= \frac{1}{2}(2\sqrt{u})+c\\ &= \sqrt{x^2+1}+C.\end{aligned}$$

1191. Achar as seguintes integrais usando as substituições indicadas

a)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}, \quad x=\frac{1}{t}$$

Solução:

Domínio:

$$x^2 - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < -\sqrt{2} \text{ ou } x > \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{-1}{\sqrt{2}} < t < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{1}{t^2}dt$$

Daí,

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}} = \int \frac{-t \cdot dt}{t^2\sqrt{(\frac{1}{t})^2 - 2}} = \int \frac{-dt}{t\sqrt{(\frac{1}{t})^2 - 2}}$$

$\frac{-1}{\sqrt{2}} < t < 0:$

$$I = \int \frac{-dt}{-\sqrt{t^2}\sqrt{(\frac{1}{t})^2 - 2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}}$$

Sabendo que $\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = \arcsin(\frac{t}{a}) + C$

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2} - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{t}{1/\sqrt{2}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2}t) + C$$

$0 < t < \frac{1}{\sqrt{2}}:$

$$I = \int \frac{-dt}{\sqrt{t^2}\sqrt{(\frac{1}{t})^2 - 2}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{1-2t^2}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2} - t^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2}t) + C$$

Ou seja,
se $x < -\sqrt{2}$ então

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right) + C$$

e se $x > \sqrt{2}$ então

$$I = -\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right) + C$$

b)

$$\int \frac{dx}{e^x + 1}, \quad x = -\ln t$$

Solução:

$x = -\ln t \quad \Leftrightarrow \quad e^x = e^{-\ln t} = t^{-1}$
$x = -\ln t \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{1}{t}dt$
Daí,

$$\begin{aligned} I = \int \frac{dx}{e^x + 1} &= \int -\frac{1}{t} \frac{dt}{(\frac{1}{t} + 1)} \\ &= \int \frac{-dt}{1 + t} \\ &= -\int \frac{d(t+1)}{t+1} \\ &= -\ln|t + 1| + C \\ &= -\ln|e^{-x} + 1| + C \end{aligned}$$

---

d)

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}, \quad t = \sqrt{x+1}$$

Solução:

$$t = \sqrt{x+1} \quad \Rightarrow \quad t^2 = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = t^2 - 1$$
$$x = t^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad dx = 2tdt$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} &= \int \frac{(t^2-1)2tdt}{t} \\
&= 2\int (t^2-1)dt \\
&= 2(\frac{t^3}{3}-t)+C \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C
\end{aligned}$$

Outra maneira:

$$\begin{aligned}
\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} &= \int \frac{xd(x+1)}{\sqrt{x+1}}^{x+1=u} \\
&= \int \frac{(u-1)du}{\sqrt{u}} \\
&= \int \sqrt{u}du - \int \frac{du}{\sqrt{u}} \\
&= \frac{2}{3}u^{2/3}-2\sqrt{u}+C \\
&= \frac{2}{3}(x+1)^{2/3}-2\sqrt{x+1}+C
\end{aligned}$$

---

e)

$$\int \frac{\cos x\ dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}, \quad t=\sin x$$

Solução:

$$t=\sin x \quad \Rightarrow \quad dt=\cos x\ dx$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x\ dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}} &= \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \\
&= \ln|t+\sqrt{1+t^2}|+C \\
&= \ln|\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}|+C
\end{aligned}$$

Outra maneira:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x\ dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}} &= \int \frac{d\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 t}} \\
&= \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \\
&= \ln|u+\sqrt{1+u^2}|+C \\
&= \ln|\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}|+C
\end{aligned}$$

1193. Calcule a integral

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx.$$

Solução:

Fazendo $1+\sqrt{x}=t$, temos $x=(t-1)^2$ e $dx=2(t-1)dt$. Segue que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx &= \int \left\{\frac{1+(t-1)^2}{t}\cdot 2(t-1)\right\}dt \\
&= 2\int \frac{(t^2-2t+2)(t-1)}{t}\ dt \\
&= 2\int \frac{t^3-3t^2+4t-2}{t}\ dt \\
&= 2\int \left\{t^2-3t+4-\frac{2}{t}\right\}dt \\
&= 2\cdot\left\{\frac{t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}+4t-2\ln|t|\right\}+C \\
&= \frac{2}{3}t^3-3t^2+8t-4\ln|t|+C \\
&= \frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3-3(1+\sqrt{x})^2+8(1+\sqrt{x})-4\ln(1+\sqrt{x})+C.
\end{aligned}$$

1197. Calcule a integral

$$\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Solução 1:

Fazendo $\arcsin x = t$, temos $dt = \frac{dt}{\sqrt{1-x^2}}$. Então ,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int t^2 dt \\
&= \frac{t^3}{3}+C \\
&= \frac{\arcsin^3 x}{3}+C.
\end{aligned}$$

Solução 2:
Sabendo que $d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, então

$$\begin{aligned}\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \arcsin^2 x \ d(\arcsin x)\\ &= \frac{\arcsin^3 x}{3} + C\end{aligned}$$

1201. Calcule a integral

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Solução1:

Fazendo $x = \sin\theta$, temos $dx = \cos\theta \cdot d\theta$
e $\theta = \arcsin x$. Então ,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \frac{\sin^2\theta \cdot \cos\theta}{\cos\theta}d\theta\\ &= \int \sin^2\theta \ d\theta\\ &= \int \frac{1-\cos(2\theta)}{2}d\theta\\ &= \frac{\theta}{2} - \int \frac{\cos(2\theta)}{4}d2\theta\\ &= \frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} + C\\ &= \frac{\theta}{2} - \frac{\sin\theta\cdot\cos\theta}{2} + C\\ &= \frac{\theta}{2} - \frac{\sin\theta\cdot\sqrt{1-\sin^2\theta}}{2} + C\\ &= \frac{\arcsin x}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C.\end{aligned}$$

Solução 2:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \frac{-xd(-x^2+1)}{2\sqrt{1-x^2}} \\
&= \int -xd(\sqrt{1-x^2}) \\
&= -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{(1-x^2)}dx \\
&= -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{(1-x^2)}dx \qquad (1)
\end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{(1-x^2)}dx &= \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \arcsin x - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad (2)
\end{aligned}$$

Substituindo (2) em (1) temos

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = -x\sqrt{(1-x^2)} + \arcsin x \; - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Ou seja,

$$2\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = -x\sqrt{(1-x^2)} + \arcsin x$$

Logo,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\arcsin x}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$$

1203. Calcule a integral

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx.$$

Solução:

Fazendo $x = a\sec\theta$, temos $dx = a\sec\theta\tan\theta d\theta$
e $\theta = \arccos\frac{a}{x}$. Então ,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx &= \int \frac{a\sqrt{\sec^2\theta-1}\cdot a\sec\theta\tan\theta}{a\sec\theta}d\theta \\
&= a\int \tan^2\theta d\theta \\
&= a\left(\tan\theta-\theta\right)+C \\
&= a\tan\theta-a\theta+C \\
&= a\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}-a\theta+C \\
&= a\frac{\sqrt{1-(\frac{a}{x})^2}}{\frac{a}{x}}-a\arccos(\frac{a}{x})+C \\
&= \sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C.
\end{aligned}
$$

1204. Calcule a integral

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Solução:

Fazendo $x=\sec\theta$, temos $dx=\sec\theta\tan\theta d\theta$ e $\theta=\arccos(\frac{1}{x})$. Então ,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{\sec\theta\tan\theta}{\sec\theta\sqrt{\sec^2\theta-1}}d\theta \\
&= \int \frac{\sec\theta\tan\theta}{\sec\theta\tan\theta}d\theta \\
&= \theta+C \\
&= \arccos(\frac{1}{x})+C.
\end{aligned}
$$

1211.

$$\int \ln x \; dx$$

Solução:

Fazendo integração por partes:

$$\begin{aligned}
\int \ln x \; dx &= \ln x \cdot x \; - \int x d(\ln x) \\
&= \ln x \cdot x \; - \int x \frac{1}{x} dx \\
&= x \ln x \; - x + C \\
&= x(\ln x - 1) + C
\end{aligned}$$

1213.

$$\int \arcsin x \; dx$$

Solução:

Fazendo

$$x = \sin t \quad \Rightarrow \quad t = \arcsin t$$

$$dx = \cos t \; dt$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int \arcsin x \; dx &= \int t \cos t \; dt \\
&= \int t \; d(\sin t) \\
&= t \sin t - \int \sin t dt \\
&= t \sin t + \cos t + C \\
&= x \arcsin x \; + \sqrt{1 - x^2} + C
\end{aligned}$$

1216.

$$\int \frac{x}{e^x} dx$$

Solução:

Fazendo integração por partes

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{e^x} dx &= \int -x de^{-x} \\
&= -(xe^{-x} - \int e^{-x} dx) \\
&= -(xe^{-x} + e^{-x}) + C \\
&= -\frac{x+1}{e^x} + C
\end{aligned}$$

1218.

$$\int x^2 e^{3x} dx$$

Solução:

Fazendo integração por partes

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^{3x} dx &= \frac{1}{3} \int x^2 de^{3x} = \frac{1}{3}(x^2 e^{3x} - \int e^{3x} dx^2) \\
&= \frac{1}{3}(x^2 e^{3x} - \int e^{3x} 2x dx) \\
&= \frac{1}{3}(x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x de^{3x}) \\
&= \frac{1}{3}(x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}(xe^{3x} - \int e^{3x} dx) \\
&= \frac{1}{3}(x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}(xe^{3x} - \frac{e^{3x}}{3}) \\
&= \frac{e^{3x}}{27}(9x^2 - 6x + 2)
\end{aligned}$$

1221.

$$\int x\sin x\ \cos x\ dx$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int x\sin x\ \cos x\ dx &= \frac{1}{2}\int xd\sin^2 x \\
&= \frac{1}{2}\left\{x\sin^2 x-\int \sin^2 xdx\right\} \\
&\overset{*}{=} \frac{1}{2}\left\{x\sin^2 x-\int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{x\sin^2 x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\int \cos 2x\ dx\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{x\sin^2 x-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\int \cos 2x\ d2x\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{x\sin^2 x-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\right\}+C \\
&= \frac{x}{2}(\sin^2 x-\frac{1}{2})+\frac{\sin 2x}{8}+C \\
&\overset{*}{=} \frac{-x\cos 2x}{2}+\frac{\sin 2x}{8}+C
\end{aligned}$$

* $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

1255. Calcule a integral

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$$

Solução:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+2x+5} &= \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot \arctan(\frac{x+1}{2}) + C.\end{aligned}$$

1256. Calcule a integral

$$\int \frac{dx}{x^2+2x}.$$

Solução:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+2x} &= \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2-1} \\ &= \frac{1}{2\cdot 1}\ln|\frac{(x+1)-1}{(x+1)+1}| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln|\frac{x}{x+2}| + C\end{aligned}$$

Observação : Lembrando que

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}|$$

1259. Calcule a integral

$$\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)+4}{x^2-4x+5}dx \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx + 4\int \frac{dx}{x^2-4x+5} \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx + 4\int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2+1} \\
&= \frac{3}{2}\ln|x^2-4x+5| + 4\arctan(x-2) + C.
\end{aligned}$$

1260. Calcule a integral

$$\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\,dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
(*)\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}dx &= \int \frac{x^2+3x+4}{x^2+3x+4}dx - \int \frac{5x+3}{x^2+3x+4}dx \\
&= x - \int \frac{5x+3}{x^2+3x+4}dx.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(**)\int \frac{5x+3}{x^2+3x+4}dx &= \int \frac{\frac{5}{2}(2x+3)+(3-\frac{15}{2})}{x^2+3x+4}dx \\
&= \frac{5}{2}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}dx - \frac{9}{2}\int \frac{dx}{x^2+3x+4} \\
&= \frac{5}{2}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}dx - \frac{9}{2}\int \frac{d(x+\frac{3}{2})}{(x+\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}} \\
&= \frac{5}{2}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}dx - \frac{9}{2}\int \frac{d(x+\frac{3}{2})}{(x+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{7}}{2})^2} \\
&= \frac{5}{2}\ln|x^2+3x+4| - \frac{9}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{7}}(x+\frac{3}{2})\right) + C.
\end{aligned}$$

De (*) e (**), temos

$$\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}dx = x - \frac{5}{2}\ln|x^2+3x+4| + \frac{9}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right) + C.$$

1262. Calcule a integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} & \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{3}{2}x-x^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(x-\frac{3}{4})}{\sqrt{(\frac{5}{4})^2-(x-\frac{3}{4})^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{4}{5}(x-\frac{3}{4})\right)+C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{4x-3}{5}\right)+C.
\end{aligned}$$

1263. Calcule a integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} &= \int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2-(x-\frac{1}{2})^2}} \\
&= \arcsin\left(2(x-\frac{1}{2})\right)+C \\
&= \arcsin(2x-1)+C.
\end{aligned}$$

1266. Calcule a integral

$$\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx &= -\int \frac{-2x+8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx \\
&= -\int \frac{-2x-1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx - 9\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}} \\
&= -\int \frac{-2x-1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx - 9\int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(\frac{\sqrt{5}}{2})^2-(x+\frac{1}{2})^2}} \\
&= -2\sqrt{1-x-x^2} - 9\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}(x+\frac{1}{2})\right) + C \\
&= -2\sqrt{1-x-x^2} - 9\arcsin(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}) + C.
\end{aligned}$$

1268. Calcule a integral

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Solução:

Fazendo $x = \sin\theta$, temos $dx = \cos\theta \cdot d\theta$ e $\theta = \arcsin x$. Então

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} d\theta \\
&= \int \frac{1}{\sin\theta} d\theta \\
&= \ln\Big|\frac{1}{\sin\theta} - \cot\theta\Big| + C \\
&= \ln\Big|\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}\Big| + C \\
&= \ln\Big|\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\Big| + C. \\
&= \ln\Big|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\Big| + C.
\end{aligned}$$

1276. Calcule a integral

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 12} dx.$$

Solução:

Fazendo $\sin x = u$, temos $\cos x dx = du$. Então

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 12} dx &= \int \frac{du}{u^2 - 6u + 12} \\
&= \int \frac{d(u-3)}{(u-3)^2 + (\sqrt{3})^2} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{3})^2} \int \frac{d(u-3)}{(\frac{u-3}{\sqrt{3}})^2 + 1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\frac{u-3}{\sqrt{3}})}{(\frac{u-3}{\sqrt{3}})^2 + 1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{u-3}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sin x - 3}{\sqrt{3}}\right) + C.
\end{aligned}$$

1278. Calcule a integral

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 1}}\, dx.$$

Solução 1:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1}} dx &= \int \frac{-d\cos x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1}} \\
&= -\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 4u + 1}} \\
&= -\int \frac{du}{\sqrt{(u+2)^2 - 3}}.
\end{aligned}$$

Considera $u + 2 = \sqrt{3}\sec \cdot\theta$, temos $du = \sqrt{3}\sec \cdot\theta \tan\theta d\theta$

e $\theta = arccos\frac{\sqrt{3}}{u+2}$. Então

$$\begin{aligned}
-\int \frac{du}{\sqrt{(u+2)^2 - 3}} &= -\int \frac{\sqrt{3}\sec \cdot\theta \tan\theta d\theta}{\sqrt{3(\sec\theta - 1)}} \\
&= -\int \sec\theta d\theta \\
&= -\ln|\tan\theta + \sec\theta| + C \\
&= -\ln|\frac{\sqrt{1 - \cos^2\theta}}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}| + C \\
&= -\ln|\frac{\sqrt{1 - \frac{3}{(u+2)^2}}}{\frac{\sqrt{3}}{u+2}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{u+2}}| + C \\
&= -\ln|\frac{\sqrt{u^2 + 4u + 1}}{\sqrt{3}} + \frac{u+2}{\sqrt{3}}| + C \\
&= -\ln|\sqrt{u^2 + 4u + 1} + u + 2| - \ln\sqrt{3} + C \\
&= -\ln|2 + \cos x + \sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1}| + K.
\end{aligned}$$

Solução 2:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1}} dx &= -\int \frac{du}{\sqrt{u^2+4u+1}} \\
&= -\int \frac{d(u+2)}{\sqrt{(u+2)^2-3}} \\
&= -\int \frac{d(u+2)}{\sqrt{(u+2)^2-3}} \\
&= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-3}} \\
&= -\ln|t+\sqrt{t^2-3}|+C
\end{aligned}$$

Desde que $t = u + 2$ e $u = \cos x$ então $t = \cos x + 2$ e assim temos

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1}} dx = -\ln|t+\sqrt{t^2-3}|+C = -\ln|\cos x+2+\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1}|+C$$

1280.

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$$

Solução:

Temos uma fração própria. Primeiro vamos transformá-la em frações simples.

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} = \frac{A(x+b)+B(x+a)}{(x+a)(x+b)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$1 = A(x+b)+B(x+a) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = (A+B)x + Ab + Ba$$

Igualando os coeficientes dos respectivos graus de x:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ Ab + Ba = 1. \end{cases}$$

Obtemos

$$A = \frac{1}{b-a} \quad \text{e} \quad B = \frac{-1}{b-a}$$

Daí

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{(b-a)(x+a)} - \frac{1}{(b-a)(x+b)}$$

Substituindo na integral

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} &= \frac{1}{b-a}\Big[\int \frac{dx}{x+a} - \int \frac{dx}{x+b}\Big] \\ &= \frac{1}{b-a}(\ln|x+a| - \ln|x+b|) + C \\ &= \frac{1}{b-a}\ln\frac{|x+a|}{|x+b|} + C\end{aligned}$$

1281.

$$\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$$

Solução:

Observe que

$$\begin{aligned}x^2-5x+6 &= (x-2)(x-3) \\ x^2-5x+9 &= (x-2)(x-3)+3\end{aligned}$$

Temos então

$$\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{(x-2)(x-3)+3}{(x-2)(x-3)}dx = \int dx\ + \int \frac{3}{(x-2)(x-3)}dx$$

O último termo é uma fração própria e podemos transformá-la em soma de frações simples.

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$1 = A(x-3)+B(x-2)$$

Para $x=3$ temos: $B=1$
Para $x=2$ temos: $A=-1$

Daí,

$$\int \frac{3}{(x-2)(x-3)}dx = 3\Big[\int \frac{-1}{x-2}dx + \int \frac{1}{x-3}dx\Big] = 3\ln\Big|\frac{x-3}{x-2}\Big| + C$$

Portanto,

$$\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx = \int dx + \int \frac{3}{(x-2)(x-3)}dx$$

$$= x + 3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C'$$

1284.

$$\int \frac{5x^2+2}{x^3-5x^2+4x}dx$$

Solução:

Observe que

$$x^3-5x^2+4x \quad = \quad x(x^2-5+4) = x(x-1)(x-4)$$

Temos uma fração própria e podemos transformá-la em soma de frações simples.

$$\frac{5x^2+2}{x^3-5x^2+4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-4)}$$

$$\begin{aligned} 5x^2+2 &= A(x-1)(x-4) + Bx(x-4) + Bx(x-1) \\ &= (A+B+C)x^2 + (-5A-4B-C)x + 4A \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes dos respectivos graus de x:

$$\begin{cases} A+B+C=5 \\ -5A-4B-C=0 \\ 4A=2 \end{cases}$$

Obtemos, $A = 1/2$, $B = -7/3$ e $C = 41/6$.
Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x^2+2}{x^3-5x^2+4x}dx &= \int \Big(\frac{1}{2x}+\frac{-7}{3(x-1)}+\frac{41}{6(x-4)}\Big)dx \\
&= \frac{1}{2}\ln x-\frac{7}{3}\ln|x-1|+\frac{41}{6}\ln|x-4|+C \\
&= \ln\Big|\frac{x^{1/2}(x-4)^{41/6}}{(x-1)^{7/3}}\Big|+C
\end{aligned}$$

1285.

$$\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$$

Solução:

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx$$

$$\left\{\begin{array}{c} A+B=0 \\ 2A+B+C=0 \\ A=1 \end{array}\right.$$

Obtemos, $A=1$, $B=-1$ e $C=-1$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x(x+1)^2} &= \int \Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\Big)dx \\
&= \ln|x|-\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C \\
&= \ln\Big|\frac{x}{x+1}\Big|+\frac{1}{x+1}+C
\end{aligned}$$

1288.

$$\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$$

Solução:

$$\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
5x^2+6x+9 &= A(x-3)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x-3)^2(x+1) + \\
&\quad +D(x-3)^2 \\
&= A(x^3-x^2-5x-3) + B(x^2+2x+1) + \\
&\quad +C(x^3-5x^2+3x+9) + D(x^2-6x+9)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B-5C+D=5 \\ -5A+2B+3C-6D=6 \\ -3A+B+9C+9D=9 \end{cases}$$

Obtemos, $A = 0$, $B = 9/2$, $C = 0$, e $D = 1/2$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx &= \int \Big(\frac{9}{2(x-3)^2} + \frac{1}{2(x+1)^2}\Big)dx \\
&= \frac{-9}{2(x-3)} + \frac{-1}{2(x+1)} + C \\
&= \frac{-5x-4}{(x-3)(x+1)} + C
\end{aligned}$$

1291.

$$\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx$$

Solução:

Note que $x^3 + x + 1 = x(x^2+1) + 1$. Assim

$$\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx = \int \frac{x(x^2+1)+1}{x(x^2+1)}dx = \int dx + \int \frac{1}{x(x^2+1)}dx$$

O polinômio x^2+1 tem raízes complexas, portanto as frações parciais do último termo ficam da seguinte forma:

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1x+B_2}{x^2+1}$$

$$1 = A(x^2+1) + x(B_1x+B_2)$$

$$\begin{cases} A + B_1 = 0 \\ B_2 = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

Obtemos, $A = 1$, $B_1 = -1$ e $B_2 = 0$

Assim,

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{dx}{x} \;-\; \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$= \ln|x| - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + C = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + C$$

Portanto, a integral do exercício é

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx &= \int dx + \int \frac{1}{x(x^2+1)}dx \\ &= x + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + C \end{aligned}$$

1315. Calcule a integral

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx.$$

Solução:

Fazendo $x - 1 = u^2$, temos $dx = 2u \cdot du$

e $u = \sqrt{x-1}$. Então

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx &= \int \frac{2u(u^2+1)^2}{u}du \\
&= 2\int (u^2+1)^2 du \\
&= 2\int u^4+2u^2+1du \\
&= \frac{2u^5}{5}+\frac{4u^3}{3}+2u+C \\
&= \frac{2(\sqrt{x-1})^5}{5}+\frac{4(\sqrt{x-1})^3}{3}+2\sqrt{x-1}+C.
\end{aligned}$$

1317. Calcule a integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}.$$

Solução:

Fazendo $x+1=u^2$, temos $dx=2udu$

e $u=\sqrt{x+1}$. Então

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}} &= \int \frac{2u}{u+u^3}du \\
&= 2\int \frac{du}{1+u^2} \\
&= 2\arctan u + C \\
&= 2\arctan(\sqrt{1+x})+C.
\end{aligned}$$

1323. Calcule a integral

$$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx &= \int \frac{x(x-1)}{\sqrt{x^2-1}}dx\\ &= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx.\end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx &= \int \frac{xd(x^2-1)}{2\sqrt{x^2-1}}dx\\ &= \int xd\sqrt{x^2-1}\\ &= x\sqrt{x^2-1} - \int \sqrt{x^2-1}dx\\ &= x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}dx\\ &= x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx\end{aligned}$$

Da equação segue que

$$2\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx = x\sqrt{x^2-1} + \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

Sabendo que $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \ln|x+\sqrt{x^2-1}|$ concluimos que

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx = \frac{1}{2}\{x\sqrt{x^2-1} + \ln|x+\sqrt{x^2-1}|\} + C \quad (1)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx &= \int \frac{d(x^2-1)}{2\sqrt{x^2-1}}\\ &= \sqrt{x^2-1} + B \quad (2).\end{aligned}$$

Logo, com (1) e (2) obtemos o resultado procurado:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx &= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx.\\ &= \frac{1}{2}\{x\sqrt{x^2-1} + \ln|x+\sqrt{x^2-1}|\} - \sqrt{x^2-1} + K\\ &= \frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2) + \frac{\ln|x+\sqrt{x^2-1}|}{2} + K.\end{aligned}$$

1326.

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

Solução:

Sabendo que o resultado de integrais desse tipo é da seguinte forma

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

Para a integral do enunciado temos

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}} = (ax+b)\sqrt{x^2-x+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

Diferenciando, obtemos

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}} = a\sqrt{x^2-x+1} + \frac{(ax+b)(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x+1}} + \lambda \frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

Multiplicando por $\sqrt{x^2-x+1}$ e igualando os coeficientes, segue que

$$\begin{cases} a+a=1 \\ -a+b-a/2=0 \\ a-b/2+\lambda=0 \end{cases}$$

Obtemos, $a=1/2$, $b=3/4$ e $\lambda=-1/8$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}} \\
= \quad & \left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} \\
= \quad & \frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{8}\int \frac{d(x-1/2)}{\sqrt{(x-1/2)^2+3/4}} \\
= \quad & \frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{8}\ln|(x-1/2)+\sqrt{x^2-x+1}| + C
\end{aligned}$$

1328.

$$\int \frac{x^6dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Solução:

Sabendo que o resultado de integrais desse tipo é da seguinte forma

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

Para a integral do enunciado temos

$$\int \frac{x^6dx}{\sqrt{1+x^2}} = (ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f)\sqrt{1+x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Diferenciando, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}} &= (5ax^4+4bx^3+3cx^2+2dx+e)\sqrt{1+x^2} \\ &\quad +(ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

Multiplicando por $\sqrt{1+x^2}$ e igualando os coeficientes, segue que

$$\begin{cases} 5a+a=1 \\ 4b+b=0 \\ 5a+c+c=0 \\ 4b+2d+d=0 \\ 3c+e+e=0 \\ 2d+f=0 \\ e+\lambda=0 \end{cases}$$

Obtemos, $a=1/6$, $c=-5/24$, $e=5/16$, $b=d=f=0$ e $\lambda=-5/16$

Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^6dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \Big(\frac{x^5}{6} - \frac{5x^3}{24} + \frac{5x}{16}\Big)\sqrt{1+x^2} - \frac{5}{16}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{48}(8x^5-10x^3+45x)\sqrt{1+x^2} - \frac{5}{16}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + C \end{aligned}$$

1332. Calcule a integral

$$\int x^3(1+2x^2)^{\frac{-3}{2}}dx$$

Solução:

$$
\begin{aligned}
\int x^3(1+2x^2)^{\frac{-3}{2}}dx &= \frac{-1}{2}\int x^2 d\left((1+2x^2)^{\frac{-1}{2}}\right) \\
&= \frac{-1}{2}\left\{x^2\cdot(1+2x^2)^{\frac{-1}{2}} - \int (1+2x^2)^{\frac{-1}{2}} d(x^2)\right\} \\
&= \frac{-1}{2}\left\{x^2\cdot(1+2x^2)^{\frac{-1}{2}} - 2\int x(1+2x^2)^{\frac{-1}{2}} dx\right\} \\
&= \frac{-x^2}{2}(1+2x^2)^{\frac{-1}{2}} + \int x(1+2x^2)^{\frac{-1}{2}} dx \\
&= \frac{-x^2}{2\sqrt{1+2x^2}} + \int \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}dx \\
&= \frac{-x^2}{2\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{4}\int \frac{d(1+2x^2)}{\sqrt{1+2x^2}} \\
&= \frac{-x^2}{2\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{1+2x^2} + C \\
&= \frac{-x^2}{2\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{1+2x^2} + C.
\end{aligned}
$$

1334. Calcule a integral

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$$

Solução 1:

Fazendo $x = \tan\theta$, temos $dx = \sec^2\theta\cdot d\theta$

e $\theta = \arctan x$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{\sec^2\theta}{\tan^4\theta\cdot\sec\theta}d\theta \\
&= \int \frac{\sec\theta}{\tan^4\theta}d\theta \\
&= \int \frac{\cos^3\theta}{\sin^4\theta}d\theta \\
&= \int \cot^3\theta\cdot\csc\theta d\theta \\
&= \int \cot\theta\cdot\csc\theta\cdot(\csc^2\theta-1)d\theta \\
&= \int \cot\theta\cdot\csc^3\theta-\cot\theta\cdot\csc\theta d\theta \\
&= \int \cot\theta\cdot\csc^3\theta d\theta-\int \cot\theta\cdot\csc\theta d\theta \\
&= -\frac{\csc^3\theta}{3}-\csc\theta+C \\
&= -\csc\theta\cdot\left\{\frac{\csc^2\theta}{3}-1\right\}+C \\
&= -\sqrt{1+\cot^2\theta}\cdot\left\{\frac{1+\cot^2\theta}{3}-1\right\}+C \\
&= -\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\theta}}\cdot\left\{\frac{1+\frac{1}{\tan^2\theta}}{3}-1\right\}+C \\
&= -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left\{\frac{1+\frac{1}{x^2}}{3}-1\right\}+C \\
&= -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\cdot\left\{\frac{x^2+1}{3x^2}-1\right\}+C \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}}{3x^3}\cdot(2x^2-1)+C.
\end{aligned}$$

Solução 2:

A função integrada $(x^4\sqrt{1+x^2})-1$ é do tipo $x^m(a+bx^n)^p$, com $m=-4$, $n=2$ e $p=-1/2$. Nesse caso a integral satisfaz a condição de Chebishev $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$ e a substiuição indicada é $ax^{-n}+b=z^s$, sendo s o denominador de p.

Portanto faremos $x^{-2}+1=z^2$ de onde obtemos $\frac{1}{x^4}=(z^2-1)^2$, $1+x^2=\frac{z^2}{z^2-1}$, $x=(z^2-1)^{-1/2}$ e $dx=-z(z^2-1)^{-3/2}dz$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{(z^2-1)^2 - z(z^2-1)^{-3/2}dz}{\sqrt{\frac{z^2}{z^2-1}}} \\
&= -\int (z^2-1)dz \\
&= -\frac{z^3}{3} + z + C
\end{aligned}$$

também obtemos $z = \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}$ e $-z^2+3 = \frac{2x^2-1}{x^2}$. Portanto,

$$-\frac{z^3}{3} + z = \frac{z}{3}(-z^2+3) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{3x}\frac{(}{2}x^2-1)x^2$$

Logo,

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{3x^3}(2x^2-1) + C$$

1339.

$$\int \sin^5 x dx$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \sin^5 x dx &= -\int \sin^4 x d\cos x \\
&= -\int (1-\cos^2 x)^2 d\cos x \\
&= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) d\cos x \\
&= -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{2\cos^5 x}{5} + C
\end{aligned}$$

1342.

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx &= \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} d\sin x \\
&= \int \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^3 x} d\sin x \\
&= \int \frac{1-2\sin^2 x+\sin^4 x}{\sin^3 x} d\sin x \\
&= \int \frac{1}{\sin^3 x} d\sin x - \int \frac{2}{\sin x} d\sin x + \int \sin x d\sin x \\
&= \frac{1}{-2\sin^2 x} - 2\ln|\sin x| + \frac{\sin^2 x}{2} + C
\end{aligned}$$

1345.

$$\int \sin^3 x \cos^4 x dx$$

Solução 1:

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos^4 x dx &= \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx \\
&= \int \frac{(\sin 2x)^2}{4} \frac{(1+\cos 2x)}{2} dx \\
&= \frac{1}{8}\Big[\int \sin^2 2x \ dx + \int \sin^2 2x \cos 2x \ dx\Big] \\
&= \frac{1}{8}\Big[\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx + \frac{\sin^3 2x}{2\cdot 3}\Big] \\
&= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C
\end{aligned}$$

Solução 2:

$$
\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos^4 x dx &= -\int \sin^2 x \cos^4 x d\cos x \\
&= -\int (1-\cos^2 x)\cos^4 x d\cos x \\
&= -\int \cos^4 x d\cos x + \int \cos^6 x d\cos x \\
&= \frac{-\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C
\end{aligned}
$$

1347.

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x}$$

Solução:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin^4 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x} dx \\
&= \int \frac{dx}{\sin^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx \\
&= -\frac{\cos x}{\sin x} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \sin^2 x} dx \\
&= -\frac{\cos x}{\sin x} - \int \Big(\frac{\cos x}{\sin x}\Big)^2 d\Big(\frac{\cos x}{\sin x}\Big) \\
&= -\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{3}\Big(\frac{\cos x}{\sin x}\Big)^3 + C
\end{aligned}
$$

1351.

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x}$$

Solução: Sabendo que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin x} &= \sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \left(1+\frac{1}{\tan^2 x}\right)^{1/2} = \frac{1}{\tan x}(1+\tan^2 x)^{1/2} \\
\frac{1}{\cos x} &= \sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = (1+\tan^2 x)^{1/2}
\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x} &= \int \frac{d\tan x}{\sin^5 x \cos x} \\
&= \int \frac{1}{\tan^5 x}(1+\tan^2 x)^{5/2}(1+\tan^2 x)^{1/2} d\tan x \\
&= \int \frac{1}{\tan^5 x}(1+\tan^2 x)^3 d\tan x \\
&= \int \frac{1+3\tan^2 x+3\tan^4 x+\tan^6 x}{\tan^5 x} d\tan x \\
&= \int \left(\frac{1}{\tan^5 x}+\frac{3}{\tan^3 x}+\frac{3}{\tan x}+\tan x\right) d\tan x \\
&= \frac{-1}{4\tan^4 x}+\frac{-3}{2\tan^2 x}+3\ln|\tan x|+\frac{\tan^2 x}{2}+C
\end{aligned}$$

1352.

$$\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}$$

Solução:

Sabendo que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} &= \sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = (\tan^2 x+1)^{1/2} \\
\frac{1}{\sin x} &= \sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \left(1+\frac{1}{\tan^2 x}\right)^{1/2} = \frac{1}{\tan x}(\tan^2 x+1)^{1/2}
\end{aligned}$$

e substituindo $u = \frac{x}{2}$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}} &= 2\int \frac{du}{\sin u\cos^3 u} \\
&= 2\int \frac{d\tan u}{\sin u\cos u} \\
&= 2\int \frac{(\tan^2 u+1)^{1/2}(\tan^2 u+1)^{1/2} d\tan u}{\tan u} \\
&= 2\int \frac{(\tan^2 u+1)d\tan u}{\tan u} \\
&= 2\int \tan u d\tan u + 2\int \frac{d\tan u}{\tan u} \\
&= \tan^2 u + 2\ln|\tan u| + C \\
&= \tan^2\frac{x}{2} + 2\ln|\tan\frac{x}{2}| + C
\end{aligned}$$

*Obs. Resposta do livro: $\sec^2\frac{x}{2} + +2\ln|\tan\frac{x}{2}|$

1356.

$$\int \tan^2(5x)dx$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \tan^2(5x)dx &= \int(\sec^2(5x)-1)dx \\
&= \int \sec^2(5x)dx - \int dx \\
&= \frac{\tan 5x}{5} - x + C
\end{aligned}$$

1357.

$$\int \cot^3 x\ dx$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \cot^3 x\ dx &= \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} dx \\
&= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} d\sin x \\
&= \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x} d\sin x \\
&= \int \frac{1}{\sin^3 x} d\sin x - \int \frac{1}{\sin x} d\sin x \\
&= -\frac{1}{2\sin^2 x} - \ln|\sin x| + C \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \csc^2(x) - \ln|\sin x| + C \\
&= -\frac{1}{2} \cdot (1+\cot^2(x)) - \ln|\sin x| + C \\
&= \frac{-\cot^2 x}{2} - \ln|\sin x| + K
\end{aligned}$$

1365. Calcule a integral

$$\int \sin(\mathit{3x}) \cos(\mathit{5x}) dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \sin(3x)\cos(5x) dx &= \frac{1}{2} \int \sin(8x) + sin(-2x) dx \\
&= \frac{1}{2} \int \sin(8x) dx + \frac{1}{2} \int \sin(-2x) dx \\
&= \frac{1}{2} \int \sin(8x) dx - \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx \\
&= \frac{-1}{16} \cos(8x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + C.
\end{aligned}$$

1366. Calcule a integral

$$\int \sin(\mathit{10x})\sin(\mathit{15x})dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}\int \sin(10x)\sin(15x)dx &= \frac{1}{2}\int \cos(5x)-\cos(25x)dx\\ &= \frac{1}{2}\int \cos(5x)dx - \frac{1}{2}\int \cos(25x)dx\\ &= \frac{1}{10}\sin(5x) - \frac{1}{50}\sin(25x) + C.\end{aligned}$$

1367. Calcule a integral

$$\int \cos(\frac{x}{\mathit{2}})\cos(\frac{x}{\mathit{3}})dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}\int \cos(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{3})dx &= \frac{1}{2}\int \cos(\frac{x}{6})+\cos(\frac{5x}{6})dx\\ &= \frac{1}{2}\int \cos(\frac{x}{6})dx + \frac{1}{2}\int \cos(\frac{5x}{6})dx\\ &= 3\sin(\frac{x}{6}) + \frac{3}{5}\sin(\frac{5x}{6}) + C.\end{aligned}$$

1371. Calcule a integral

$$\int \cos(x)\cos^{\mathit{2}}(\mathit{3x})dx.$$

Solução:

$$
\begin{aligned}
\int \cos(x)\cos^2(3x)dx &= \int \cos(x)\cos(3x)\cos(3x)dx \\
&= \int \frac{1}{2}\left(\cos(2x)+\cos(4x)\right)\cos(3x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int \cos(2x)\cos(3x)+\cos(4x)\cos(3x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int \cos(2x)\cos(3x)dx + \frac{1}{2}\int \cos(4x)\cos(3x)dx \\
&= \frac{1}{4}\int \cos(x)+\cos(5x)dx + \frac{1}{4}\int \cos(x)+\cos(7x)dx \\
&= \frac{\sin(x)}{4}+\frac{\sin(5x)}{20}+\frac{\sin(x)}{4}+\frac{\sin(7x)}{28}+C \\
&= \frac{\sin(x)}{2}+\frac{\sin(5x)}{20}+\frac{\sin(7x)}{28}+C.
\end{aligned}
$$

1373.

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x}dx$$

Solução:

Para integrais do tipo $\int R(\sin x, \cos x)dx$ podemos fazer a seguinte substituição:

$$t = \tan\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad e \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3+5\cos x}dx &= \int \frac{2dt}{(1+t^2)(3+5(\frac{1-t^2}{1+t^2})} \\
&= \int \frac{2dt}{3(1+t^2)5(1-t^2)} \\
&= \int \frac{2dt}{8-2t^2} = \int \frac{dt}{4-t^2} \\
&= \int \frac{dt}{-(t-2)(t+2)} \\
&= \int \frac{dt}{-4(t-2)} + \int \frac{dt}{4(t+2)} \\
&= \int \frac{d(t-2)}{-4(t-2)} + \int \frac{d(t+2)}{4(t+2)} \\
&= \frac{-\ln|t-2|}{4} + \frac{\ln|t+2|}{4} + C \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+2}{\tan\frac{x}{2}-2}\right| + C
\end{aligned}
$$

1375.

$$\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$$

Solução:

Usemos a transformação $t = \tan\frac{x}{2}$, e consequentemente $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ e $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$. Assim temos;

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx &= \int \frac{(1-t^2)2dt}{(1+t^2)^2(1+(\frac{1-t^2}{1+t^2}))} \\
&= \int \frac{(1-t^2)2dt}{(1+t^2)2} \\
&= \int \frac{(1-t^2-1+1)dt}{(1+t^2)} \\
&= \int \frac{-(t^2+1)dt}{(1+t^2)} + \int \frac{2dt}{(1+t^2)} \\
&= -t + 2\arctan t + C \\
&= -\tan\frac{x}{2} + 2\ \frac{x}{2} + C \\
&= x - \tan\frac{x}{2} + C
\end{aligned}$$

1377.

$$\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}dx$$

Solução:

Para resolver essa integral de função racional desin x e $\cos x$ vamos usar a substituição $t = \tan\frac{x}{2}$, de onde segue que $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ e $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}dx &= \int \frac{2dt}{(1+t^2)\Big(8-4\dfrac{2t}{1+t^2}+7\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\Big)} \\
&= \int \frac{2dt}{8(1+t^2)-8t+7(1-t^2)} \\
&= \int \frac{2dt}{t^2-8t+15}
\end{aligned}$$

Desde que

$$t^2 - 8t + 15 = (t-5)(t-3)$$

segue que,

$$\frac{1}{t^2 - 8t + 15} = \frac{1}{2(t-5)} - \frac{1}{2(t-3)}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}dx &= \int \frac{2dt}{t^2 - 8t + 15} \\
&= \int \frac{dt}{t-5} - \int \frac{dt}{t-3} \\
&= \ln|t-5| - \ln|t-3| + C \\
&= \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2} - 5}{\tan\frac{x}{2} - 3}\right| + C
\end{aligned}$$

1379.

$$\int \frac{3\sin x + 2\cos x}{2\sin x + 3\cos x}dx$$

Solução:

Veja que,

$$3\sin x + 2\cos x = \alpha(2\sin x + 3\cos x) + \beta(2\sin x + 3\cos x)'$$

se, e somente se,
$3 = 2\alpha - 3\beta$
$2 = 3\alpha + 2\beta$
$\alpha = 12/13$ e $\beta = -5/13$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3\sin x + 2\cos x}{2\sin x + 3\cos x}dx &= \frac{12}{13}\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{2\sin x + 3\cos x}dx - \frac{5}{13}\int \frac{(2\sin x + 3\cos x)'}{2\sin x + 3\cos x}dx \\
&= \frac{12x}{13} - \frac{5}{13}\ln|2\sin x + 3\cos x| + C
\end{aligned}$$

1381.

$$\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}dx &= \int \frac{dx}{1+3(\frac{1+\cos 2x}{2})} \\
&= \int \frac{2dx}{2+3(1+\cos 2x)} \\
&= \int \frac{d2x}{5+\cos 2x} \\
&= \int \frac{du}{5+\cos u}
\end{aligned}$$

Fazendo a substiuição $t = \tan\frac{u}{2}$, $\cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ e $du = \frac{2dt}{1+t^2}$, temos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}dx &= \int \frac{du}{5+3\cos u} \\
&= \int \frac{2dt}{(1+t^2)(5+3\frac{1-t^2}{1+t^2})} \\
&= \int \frac{2dt}{5(1+t^2)+3(1-t^2)} \\
&= \int \frac{2dt}{2t^2+8} \\
&= \int \frac{dt}{t^2+4} \\
&= \int \frac{2d(t/2)}{4((\frac{t}{2})^2+1)} \\
&= \frac{1}{2}\arctan(t/2)+C
\end{aligned}$$

Como $u = 2x$ e $t = \tan\frac{u}{2}$ então $t = \tan x$.
Portanto

$$\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\arctan\Big(\frac{\tan x}{2}\Big)+C$$

1383.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x}$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x} &= \int \frac{dx}{(\sin^2 x - \cos^2 x) + (3\sin x \cos x)} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d2x}{-\cos(2x) + \frac{3}{2}\sin(2x)} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\frac{3}{2}\sin u - \cos u}
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $t = \tan\frac{u}{2}$, $\cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ e $du = \frac{2dt}{1+t^2}$, temos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x} &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\frac{3}{2}\sin u - \cos u} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2dt}{(1+t^2)(\frac{3}{2}(\frac{2t}{1+t^2}) - (\frac{1-t^2}{1+t^2})} \\
&= \int \frac{dt}{3t - (1-t^2)} \\
&= \int \frac{dt}{t^2 + 3t - 1}
\end{aligned}$$

Desde que

$$t^2 + 3t - 1 = (t + \frac{3+\sqrt{13}}{2})(t + \frac{3-\sqrt{13}}{2})$$

Logo,

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x} = \int \frac{dt}{t^2 + 3t - 1}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{dt}{\sqrt{13}(t + \frac{3+\sqrt{13}}{2})} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{-\sqrt{13}(t + \frac{3-\sqrt{13}}{2})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{13}}\int \frac{d(t + \frac{3+\sqrt{13}}{2})}{t + \frac{3+\sqrt{13}}{2}} - \frac{1}{\sqrt{13}}\int \frac{d(t + \frac{3-\sqrt{13}}{2})}{t + \frac{3-\sqrt{13}}{2}} \\
&= \frac{\ln|t + \frac{3+\sqrt{13}}{2}|}{\sqrt{13}} - \frac{\ln|t + \frac{3-\sqrt{13}}{2}|}{\sqrt{13}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{t + \frac{3+\sqrt{13}}{2}}{t + \frac{3-\sqrt{13}}{2}}\right|
\end{aligned}$$

Como $u = 2x$ e $t = \tan \frac{u}{2}$ então $t = \tan x$.
Portanto

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{13}} \ln\left|\frac{\tan x + \frac{3+\sqrt{13}}{2}}{\tan x + \frac{3-\sqrt{13}}{2}}\right| + C$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{13} \ln\left|\frac{2\tan x + 3 + \sqrt{13}}{2\tan x + 3 - \sqrt{13}}\right| + C$$

1403. Calcule a integral

$$\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx.$$

Solução:

$$\int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx \quad = \quad \int \sqrt{4 - (x+1)^2} dx$$

Fazendo $x + 1 = 2u$, temos $dx = 2du$ e $u = \frac{x+1}{2}$.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4 - (x+1)^2} dx &= 2 \int \sqrt{4 - 4u^2} du \\ &= 4 \int \sqrt{1 - u^2} du. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - u^2} du &= u\sqrt{1-u^2} - \int u \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2u) \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \\ &= u\sqrt{1-u^2} + \int \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} du \\ &= u\sqrt{1-u^2} - \int \sqrt{1-u^2} du + \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-u^2}du &= u\sqrt{1-u^2} - \int \sqrt{1-u^2}du + \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\
2\int \sqrt{1-u^2}du &= u\sqrt{1-u^2} + \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\
\int \sqrt{1-u^2}du &= \frac{u}{2}\sqrt{1-u^2} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\
&= \frac{u}{2}\sqrt{1-u^2} + \frac{1}{2}\arcsin(u) + C \\
&= \frac{\frac{x+1}{2}}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + C \\
&= \frac{x+1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + C \\
&= \frac{x+1}{8}\sqrt{3-2x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{3-2x-x^2}dx &= 4\int \sqrt{1-u^2}du. \\
&= 4\cdot\left\{\frac{x+1}{8}\sqrt{3-2x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right)\right\} + A \\
&= \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 2\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + A.
\end{aligned}$$

1404. Calcule a integral

$$\int \sqrt{2+x^2}\,dx.$$

Solução:

Fazendo $x = \sqrt{2}\tan\theta$, temos $dx = \sqrt{2}\sec^2\theta d\theta$

e $\theta = \arctan\frac{x}{\sqrt{2}}$. Então ,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{2+x^2}dx &= \int \sqrt{2(1-\tan^2\theta)}\sqrt{2}\sec^2\theta d\theta \\
&= 2\int \sec^3\theta d\theta
\end{aligned}$$

Temos,

$$\begin{aligned}
\int \sec^3\theta d\theta &= \int \sec\theta d(\tan\theta) \\
&= \sec\theta\cdot\tan\theta - \int \tan^2\theta\sec\theta d\theta \\
&= \sec\theta\cdot\tan\theta - \int (1-\sec^2\theta)\sec\theta d\theta \\
&= \sec\theta\cdot\tan\theta - \int \sec^3\theta d\theta + \int \sec\theta d\theta.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\int \sec^3\theta d\theta &= \tan\theta\cdot\sec\theta - \int \sec^3\theta d\theta + \int \sec\theta d\theta \\
2\int \sec^3\theta d\theta &= \tan\theta\cdot\sec\theta + \int \sec\theta d\theta \\
&= \tan\theta\cdot\sec\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta| + C \\
&= \tan\theta\sqrt{1+\tan^2\theta} + \ln|\sqrt{1+\tan^2\theta}+\tan\theta| + C \\
&= \frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{1+(\frac{x}{\sqrt{2}})^2} + \ln|\sqrt{1+(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}+\frac{x}{\sqrt{2}}| + C \\
&= \frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2+x^2}{2}} + \ln|\sqrt{\frac{2+x^2}{2}}+\frac{x}{\sqrt{2}}| + C \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{2+x^2} + \ln|\frac{\sqrt{2+x^2}+x}{\sqrt{2}}| + C \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{2+x^2} + \ln|x+\sqrt{2+x^2}| - \ln\sqrt{2} + C \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{2+x^2} + \ln|x+\sqrt{2+x^2}| + K.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{2+x^2}dx &= \int \sqrt{2(1-\tan^2\theta)}\sqrt{2}\sec^2\theta d\theta \\
&= 2\int \sec^3\theta d\theta \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{2+x^2} + \ln|x+\sqrt{2+x^2}| + K.
\end{aligned}$$

1405. Calcule a integral

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}dx.$$

Solução:

Fazendo $\quad x = 3\tan\theta$, temos $\quad dx = 3\sec^2\theta d\theta$

e $\quad \theta = \arctan\left(\frac{x}{3}\right)$. Então ,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}dx &= \int \frac{9\tan^2\theta \cdot 3\sec^2\theta}{\sqrt{9\cdot(1+\tan^2\theta)}}d\theta \\
&= 9\int \tan^2\theta \cdot \sec\theta d\theta \\
&= 9\int (\sec^2\theta - 1)\cdot \sec\theta d\theta \\
&= \frac{9}{2}\cdot 2\int \sec^3\theta d\theta - 9\int \sec\theta d\theta \\
&= \frac{9}{2}\left(\tan\theta\cdot\sec\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|\right) \\
&\quad -9\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C \\
&= \frac{9}{2}\tan\theta\cdot\sec\theta + \frac{9}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| \\
&\quad -9\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C \\
&= \frac{9}{2}\tan\theta\cdot\sec\theta - \frac{9}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C \\
&= \frac{9}{2}\tan\theta\cdot\sqrt{1+tan^2\theta} - \frac{9}{2}\ln|\sqrt{1+tan^2\theta}+\tan\theta| + C \\
&= \frac{9}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} - \frac{9}{2}\ln|\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}+\frac{x}{3}| + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3x}{2}\cdot\sqrt{\frac{9+x^2}{9}} - \frac{9}{2}\ln|\sqrt{\frac{9+x^2}{9}}+\frac{x}{3}| + C \\
&= \frac{x}{2}\cdot\sqrt{9+x^2} - \frac{9}{2}\ln|\frac{\sqrt{9+x^2}+x}{3}| + C \\
&= \frac{x}{2}\cdot\sqrt{9+x^2} - \frac{9}{2}(\ln|\sqrt{9+x^2}+x| - \ln 3) + C \\
&= \frac{x}{2}\cdot\sqrt{9+x^2} - \frac{9}{2}\ln|\sqrt{9+x^2}+x| + \frac{9}{2}\ln 3 + C \\
&= \frac{x}{2}\cdot\sqrt{9+x^2} - \frac{9}{2}\ln|\sqrt{9+x^2}+x| + K.
\end{aligned}
$$

1406. Calcule a integral

$$\int \sqrt{x^2 - 2x + 2}\, dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-2x+2}dx &= \int \sqrt{1+(x-1)^2}d(x-1) \\
&= \int \sqrt{1+u^2}du \\
&= u\sqrt{1+u^2} - \int \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}du \\
&= u\sqrt{1+u^2} - \left\{\int \sqrt{1+u^2}du - \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du\right\} \\
&= u\sqrt{1+u^2} - \int \sqrt{1+u^2}du + \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du.
\end{aligned}$$

Ou seja, temos,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+u^2}du &= u\sqrt{1+u^2} - \int \sqrt{1+u^2}du + \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du. \\
2\int \sqrt{1+u^2}du &= u\sqrt{1+u^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du \\
\int \sqrt{1+u^2}du &= \frac{u}{2}\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du \\
&= \frac{u}{2}\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln|u+\sqrt{1+u^2}| + C \\
&= \frac{x-1}{2}\sqrt{1+(x-1)^2} + \frac{1}{2}\ln|x-1+\sqrt{1+(x-1)^2}| + C \\
&= \frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2} + \frac{1}{2}\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x+2}| + C.
\end{aligned}$$

1407. Calcule a integral

$$\int \sqrt{x^2 - 4}\, dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-4}dx &= x\sqrt{x^2-4} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}dx \\
&= x\sqrt{x^2-4} - \left\{\int \sqrt{x^2-4}dx + \int \frac{4}{\sqrt{x^2-4}}dx\right\} \\
&= x\sqrt{x^2-4} - \int \sqrt{x^2-4}dx - \int \frac{4}{\sqrt{x^2-4}}dx.
\end{aligned}$$

Temos,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-4}dx &= x\sqrt{x^2-4} - \int \sqrt{x^2-4}dx - 4\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx \\
2\int \sqrt{x^2-4}dx &= x\sqrt{x^2-4} - 4\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx \\
\int \sqrt{x^2-4}dx &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\ln|x+\sqrt{x^2-4}| + C.
\end{aligned}$$

1408. Calcule a integral

$$\int \sqrt{x^2+x}\,dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+x}dx &= \int \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}dx \\
&= \int \sqrt{\frac{(2x+1)^2}{4} - \frac{1}{4}}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \sqrt{(2x+1)^2-1}dx \\
&= \frac{1}{4}\int \sqrt{(2x+1)^2-1}d(2x-1) \\
&= \frac{1}{4}\int \sqrt{u^2-1}\ du.
\end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{u^2-1}\; du &= u\sqrt{u^2-1} - \int \frac{u^2}{\sqrt{u^2-1}} du \\
&= u\sqrt{u^2-1} - \left\{ \int \sqrt{u^2-1} du + \int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} du \right\} \\
&= u\sqrt{u^2-1} - \int \sqrt{u^2-1} du - \int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} du. \\
2\int \sqrt{u^2-1} du &= u\sqrt{u^2-1} - \int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} du \\
\int \sqrt{u^2-1} du &= \frac{u}{2}\sqrt{u^2-1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} du \\
&= \frac{u}{2}\sqrt{u^2-1} - \frac{1}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-1}| + C.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+x} dx &= \frac{1}{4}\int \sqrt{u^2-1}\; du \\
&= \frac{1}{4}\cdot\left\{ \frac{u}{2}\sqrt{u^2-1} - \frac{1}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-1}| \right\} + C \\
&= \frac{u}{8}\sqrt{u^2-1} + \frac{1}{8}\ln|u+\sqrt{u^2-1}| + C \\
&= \frac{2x+1}{8}\sqrt{(2x+1)^2-1} + \frac{1}{8}\ln|2x+1+\sqrt{(2x+1)^2-1}| + C \\
&= \frac{2x+1}{8}\sqrt{4x^2+4x} + \frac{1}{8}\ln|2x+1+\sqrt{4x^2+4x}| + C \\
&= \frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x} + \frac{1}{8}\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x}| + C.
\end{aligned}$$

1415.

$$\int (x^2+1)^2 e^{2x} dx$$

Solução:

Vamos aplicar sucessivamente a regra de Integração por Partes. Para facilitar a integração por partes, substituimos $2x = u$, e daí $x = \frac{u}{2}$ e $dx = \frac{1}{2}du$.

$$\int (x^2+1)^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int (\frac{u^2}{4}+1)^2 e^u du$$

$$= \frac{1}{2}\int (\frac{u^4}{16}+\frac{u^2}{2}+1)e^u du = \frac{1}{32}\int (u^4+8u^2+16)de^u$$

Agora façamos a integração por partes:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{32}\int (u^4+8u^2+16)de^u = \frac{1}{32}\left\{(u^2+4)^2e^u - \int e^u d(u^4+8u^2+16)\right\}\\
= &\ \frac{1}{32}\left\{(u^2+4)^2e^u - \int (4u^3+16u)de^u\right\}\\
= &\ \frac{1}{32}\left\{(u^2+4)^2e^u - \left[(4u^3+16u)e^u - \int e^u(12u^2+16)du\right]\right\}\\
= &\ \frac{1}{32}\left\{(u^2+4)^2e^u - \left[\ (\ ''\ )\ e^u - \left((12u^2+16)e^u - \int e^u d(12u^2+16)\right)\right]\right\}\\
= &\ \frac{1}{32}\left\{(u^2+4)^2e^u - \left[(\ ''\ )e^u - \left((12u^2+16)e^u - \int 24u de^u\right)\right]\right\}\\
= &\ \frac{1}{32}\left\{(u^2+4)^2e^u - \left[(\ ''\ )e^u - \left(4(3u^2+4)e^u - \{24ue^u - \int e^u d24u\}\right)\right]\right\}\\
= &\ \frac{1}{32}\left\{(u^2+4)^2e^u - \left[(\ ''\ )e^u - \left(4(3u^2+4)e^u - \{24ue^u - 24e^u\}\right)\right]\right\}\\
= &\ \frac{1}{32}\left\{(u^2+4)^2e^u - (4u^3+16u)e^u + 4(3u^2+4)e^u - 24ue^u + 24e^u\right\}\\
= &\ \frac{e^u}{32}\left\{u^4+8u^2+16-4u^3-16u+12u^2+16-24u+24\right\}\\
= &\ \frac{e^u}{32}\left\{u^4-4u^3+20u^2-40u+56\right\}
\end{aligned}$$

Desde que $u = 2x$ temos que

$$\begin{aligned}
\int (x^2+1)^2e^{2x}dx &= \frac{e^{2x}}{32}\left\{16x^4-32x^3+80x^2-80x+56\right\}\\
&= \frac{e^{2x}}{2}\left\{x^4-2x^3+5x^2-5x+\frac{7}{2}\right\}
\end{aligned}$$

1416.

$$\int x^2 \cos^2(3x)\ dx$$

Solução:

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos^2(3x)\ dx &= \frac{1}{2}\int x^2(1+\cos 6x)\ dx \\ &= \frac{1}{2}\int x^2 dx + \frac{1}{2}\int x^2 \cos 6x\ dx \quad (1)\end{aligned}$$

Vamos fazer integração por partes do segundo termo, mas antes façamos $6x = u$, segue que $x = \frac{1}{6}u$ e $dx = \frac{1}{6}du$. Logo,

$$\int x^2 \cos 6x\ dx = \frac{1}{36\cdot 6}\int u^2 \cos u\ du$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{216}\int u^2\ d\sin u \\
&= \frac{1}{216}\left\{u^2 \sin u - \int \sin u du^2\right\} \\
&= \frac{1}{216}\left\{u^2 \sin u - \int 2u \sin u du\right\} \\
&= \frac{1}{216}\left\{u^2 \sin u + \int 2u d\cos u\right\} \\
&= \frac{1}{216}\left\{u^2 \sin u + \left[2u\cos u - \int \cos u\ 2du\right]\right\} \\
&= \frac{1}{216}\left\{u^2 \sin u + 2u\cos u - 2\sin u\right\} \\
(u = 6x)& \\
&= \frac{1}{216}\left\{36x^2 \sin 6x + 12x\cos 6x - 2\sin 6x\right\} + C \quad (2)
\end{aligned}$$

De (1):

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cos^2(3x)\ dx &= \frac{1}{2}\int x^2 dx + \frac{1}{2}\int x^2 \cos 6x\ dx \\
&\qquad (substituindo (2)) \\
&= \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\ \frac{1}{216}\left\{36x^2 \sin 6x + 12x\cos 6x - 2\sin 6x\right\} + K \\
&= \frac{1}{6}\left\{x^3 + \frac{x^2}{2}\sin 6x + \frac{x}{6}\cos 6x - \frac{1}{36}\sin 6x\right\} + K
\end{aligned}$$

1417.

$$\int x \sin x \cos 2x \ dx$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int x \sin x \cos 2x \ dx &= \int x \sin x (2\cos^2 x - 1) \ dx \\
&= 2\int x \sin x \cos^2 x \ dx - \int x \sin x \ dx \\
&= -2\int x \cos^2 x \ d\cos x + \int x \ d\cos x \\
&= -\frac{2}{3}\int x d\cos^3 x + \int x d\cos x \\
&= -\frac{2}{3}\Big[x\cos^3 x - \int \cos^3 x dx\Big] + \Big[x\cos x - \int \cos x dx\Big] \\
&= -\frac{2}{3}\Big[x\cos^3 x - \int \cos^2 x d\sin x\Big] + \Big[x\cos x - \sin x + C\Big] \\
&= -\frac{2}{3}\Big[x\cos^3 x - \int (1-\sin^2 x) d\sin x\Big] + \Big[x\cos x - \sin x + C\Big] \\
&= -\frac{2}{3}\Big[x\cos^3 x - \int d\sin x + \int \sin^2 x d\sin x\Big] + \Big[x\cos x - \sin x + C\Big] \\
&= -\frac{2}{3}\Big[x\cos^3 x - \sin x + \frac{\sin^3 x}{3}\Big] + x\cos x - \sin x + K
\end{aligned}$$

1427. Deduza a fórmula de recorreência para a integral abaixo e calcule para n=2 e n=3.

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} dx.$$

Solução 1:

Fazendo $x = a\tan\theta$, temos $dx = a\sec^2\theta$

e $\theta = \arctan\frac{x}{a}$. Então ,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}dx &= \int \frac{a\sec^2\theta}{a^{2n}(\tan^2\theta+1)^n}d\theta \\ &= \frac{1}{a^{2n-1}}\int \cos^{2n-2}\theta d\theta.\end{aligned}$$

Lembrando que,

$$\int \cos^m\theta d\theta = \frac{\cos^{m-1}\theta\sin\theta}{m} + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2}\theta d\theta$$

Temos,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}dx &= \int \frac{a\sec^2\theta}{a^{2n}(\tan^2\theta+1)^n}d\theta \\ &= \frac{1}{a^{2n-1}}\int \cos^{2n-2}\theta d\theta. \\ &= \frac{1}{a^{2n-1}}\cdot\left\{\frac{\cos^{2n-3}\theta\sin\theta}{2n-2} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \cos^{2n-4}\theta d\theta\right\} \\ &= \frac{\cos^{2n-3}\theta\sin\theta}{a^{2n-1}(2n-2)} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)}\frac{1}{a^{2n-3}}\int \cos^{2n-4}\theta d\theta.\end{aligned}$$

Temos que,

$$I_{n-1} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^{2n-2}\sec^{2n-2}\theta}d\theta = \frac{1}{a^{2n-3}}\int \cos^{2n-4}\theta d\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \qquad \sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

$$\begin{aligned}
\cos^{2n-3}\theta \cdot \sin\theta &= \frac{1}{(\sqrt{1+\tan^2\theta})^{2n-3}} \cdot \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \\
&= \frac{\tan\theta}{(1+\tan^2\theta)^{n-1}} \\
&= \frac{x/a}{(1+(x/a)^2)^{n-1}} \\
&= \frac{x/a}{(\frac{a^2+x^2}{a^2})^{n-1}} \\
&= \frac{x \cdot a^{2n-3}}{(a^2+x^2)^{n-1}}
\end{aligned}$$

Então ,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} &= \frac{\cos^{2n-3}\theta \sin\theta}{a^{2n-1}(2n-2)} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)} \cdot I_{n-1} \\
&= \frac{x \cdot a^{2n-3}}{2a^{2n-1}(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)} \cdot I_{n-1} \\
&= \frac{x}{2a^2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)} \cdot I_{n-1} \\
&= \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \left\{ \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + (2n-3) \cdot I_{n-1} \right\} + C.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \left\{ \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + (2n-3) \cdot I_{n-1} \right\} + C.$$

Solução 2:

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \int \frac{a\cdot d(\frac{x}{a})}{a^{2n}\cdot(1+(\frac{x}{a})^2)^n} \\
&= \frac{1}{a^{2n-1}}\cdot\int\frac{d(\frac{x}{a})}{(1+(\frac{x}{a})^2)^n} = \frac{1}{a^{2n-1}}\cdot\int\frac{dy}{(1+y^2)^n} \\
&= \frac{1}{a^{2n-1}}\cdot\left\{\int\frac{1+y^2}{(1+y^2)^n}dy - \int\frac{y^2}{(1+y^2)^n}dy\right\} \\
&= \frac{1}{a^{2n-1}}\cdot\left\{\int\frac{dy}{(1+y^2)^{n-1}} - \frac{1}{2}\int\frac{y\cdot d(1+y^2)}{(1+y^2)^n}\right\} \\
&= \frac{1}{a^{2n-1}}\cdot\left\{\int\frac{dy}{(1+y^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int y\cdot d\Big(\frac{1}{(1+y^2)^{n-1}}\Big)\right\} \\
&= \frac{1}{a^{2n-1}}\cdot\left\{\int\frac{dy}{(1+y^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\left\{\frac{y}{(1+y^2)^{n-1}} - \int\frac{dy}{(1+y^2)^{n-1}}\right\}\right\} \\
&= \frac{1}{a^{2n-1}}\cdot\left\{\int\frac{dy}{(1+y^2)^{n-1}}\cdot\Big(1+\frac{1}{2(1-n)}\Big) - \frac{y}{2(1-n)\cdot(1+y^2)^{n-1}}\right\} \\
&= \frac{1}{a^{2n-1}}\cdot\left\{\int\frac{dy}{(1+y^2)^{n-1}}\cdot\frac{2n-3}{2(n-1)} - \frac{y}{2(1-n)\cdot(1+y^2)^{n-1}}\right\} \\
&= \frac{1}{2\cdot(n-1)\cdot a^{2n-1}}\cdot\left\{\int\frac{dy}{(1+y^2)^{n-1}}\cdot(2n-3) + \frac{y}{(1+y^2)^{n-1}}\right\} \\
&= \frac{1}{2\cdot(n-1)\cdot a^{2n-1}}\cdot\left\{\int\frac{d(\frac{x}{a})}{(1+(\frac{x}{a})^2)^{n-1}}\cdot(2n-3) + \frac{\frac{x}{a}}{(1+(\frac{x}{a})^2)^{n-1}}\right\} \\
&= \frac{1}{2\cdot(n-1)\cdot a^{2n-1}}\cdot\left\{\int\frac{\frac{1}{a}dx}{\frac{1}{a^{2n-2}}(a^2+x^2)^{n-1}}\cdot(2n-3) + \frac{\frac{x}{a}}{\frac{1}{a^{2n-2}}(a^2+x^2)^{n-1}}\right\} \\
&= \frac{1}{2\cdot a\cdot(n-1)}\cdot\left\{\int\frac{\frac{1}{a}dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}\cdot(2n-3) + \frac{\frac{x}{a}}{(a^2+x^2)^{n-1}}\right\} \\
&= \frac{1}{2\cdot a^2\cdot(n-1)}\cdot\left\{\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}\cdot(2n-3) + \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}}\right\} \\
&= \frac{1}{2\cdot a^2\cdot(n-1)}\cdot\left\{(2n-3)\cdot I_{n-1} + \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}}\right\} + C \\
I_n &= \frac{1}{2\cdot a^2\cdot(n-1)}\cdot\left\{(2n-3)\cdot I_{n-1} + \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}}\right\} + C.
\end{aligned}
$$

$$
I_1 = \int\frac{dx}{x^2+a^2} = a\int\frac{d(\frac{x}{a})}{a^2(1+(\frac{x}{a})^2)} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + A
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2a^2}\cdot\left\{\frac{x}{a^2+x^2} + I_1\right\} \\
&= \frac{1}{2a^2}\cdot\left\{\frac{x}{a^2+x^2} + \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right\} + C
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{4a^2}\cdot\left\{\frac{x}{(a^2+x^2)^2}+3\cdot I_2\right\}+C\\
&= \frac{1}{4a^2}\cdot\left\{\frac{x}{(a^2+x^2)^2}+3\cdot\frac{1}{2a^2}\cdot\left\{\frac{x}{a^2+x^2}+\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})\right\}\right\}+C\\
&= \frac{1}{4a^2}\cdot\left\{\frac{x}{(a^2+x^2)^2}+\frac{3}{2a^2}\cdot\frac{x}{a^2+x^2}+\frac{3}{2a^3}\arctan(\frac{x}{a})\right\}+C.
\end{aligned}$$

1430. Deduza a fórmula de recorreência para a integral abaixo e calcule para n=10.

$$I_n = \int x^n \cdot e^{-x}\,dx.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int x^n \cdot e^{-x}dx &= -\int x^n d(e^{-x})\\
&= -x^n\cdot e^{-x}+\int n\cdot x^{n-1}e^{-x}dx\\
&= -x^n\cdot e^{-x}+n\cdot\int x^{n-1}e^{-x}dx\\
&= -x^n\cdot e^{-x}+n\cdot I_{n-1}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$I_n = -x^n\cdot e^{-x}+n\cdot I_{n-1}.$$

Então ,

$$\begin{aligned}
I_{10} &= -x^{10}\cdot e^{-x}+10\cdot I_9\\
I_9 &= -x^9\cdot e^{-x}+9\cdot I_8\\
I_8 &= -x^8\cdot e^{-x}+8\cdot I_7\\
&\vdots\\
I_1 &= -x\cdot e^{-x}+e^{-x}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_{10} &= -x^{10} \cdot e^{-x} + 10 \cdot I_9 \\
&= -x^{10} \cdot e^{-x} + 10 \cdot (-x^9 + 9 \cdot I_8) \\
&= -x^{10} \cdot e^{-x} - 10 \cdot x^9 + 10 \cdot 9 \cdot I_8 \\
&= -x^{10} \cdot e^{-x} - 10 \cdot x^9 + 10 \cdot 9 \cdot (-x^8 \cdot e^{-x} + 8 \cdot I_7) \\
&= -x^{10} \cdot e^{-x} - 10 \cdot x^9 - 10 \cdot 9 \cdot x^8 \cdot e^{-x} + 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot I_7 \\
\vdots \\
I_{10} &= -x^{10} \cdot e^{-x} - 10 \cdot x^9 \cdot e^{-x} - 10 \cdot 9 \cdot x^8 \cdot e^{-x} - 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot x^7 \cdot e^{-x} \ldots \\
& \quad -10! \cdot x \cdot e^{-x} - 10! \cdot e^{-x}. \\
&= -e^{-x} \left\{ x^{10} + 10 \cdot x^9 \cdot +10 \cdot 9 \cdot x^8 + 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot x^7 + \ldots + 10! \cdot x + 10! \right\}.
\end{aligned}
$$